201 Espaces de fonctions, Exemples et applications.

I. Espace de fonctions continues.

On considère ici $a<b$ deux réels, on notera $\mathcal{C}^0([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeur dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Def ①: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, on dit que (f_n) converge uniformément vers f si

$\forall \varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\varepsilon,\ \forall x\in[a,b],\ |f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon.$

HIR p24

Thm ②: une limite uniforme de fonctions dans $\mathcal{C}^0([a,b])$ est continue.

Def ③: on munit $\mathcal{C}^0([a,b])$ de la norme uniforme $\|.\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

corollaire ④: L'espace $(\mathcal{C}^0([a,b]), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Thm ⑤ (Heine): Toute fonction de $\mathcal{C}^0([a,b])$ est uniformément continue.

p25

prop ⑥ (Lemme de Dini) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de $\mathcal{C}^0([a,b])$, qui converge simplement vers $f\in\mathcal{C}^0([a,b])$ alors la convergence est uniforme.

application ⑦: on définit par récurrence sur n la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_n$ sur $[-1,1]$ par

$$\begin{cases} P_0 = 0 \\ \forall n\in\mathbb{N}\quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x)) \quad \forall x\in[-1,1]. \end{cases}$$

p25

alors $(P_n)_n$ converge uniformément vers $x \longmapsto |x|$

[3] p508

Thm ⑧: (Weierstrass) Soit $f: [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, ω son module de continuité $\omega(h) = \sup\{|f(u)-f(v)|,\ |u-v|\leq h\}$

on considère le polynôme de Bernstein d'ordre n:

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$ Alors :

B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et même $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq C\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ où $C\in\mathbb{R}_+$.

application ⑨: soit $f\in\mathcal{C}^0([0,1])$ vérifiant $\int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$, alors $f=0$ sur $[0,1]$.

II. Le Théorème d'Ascoli

On considère ici X un espace métrique compact et on munit $\mathcal{C}^0(X)$ de la norme infini $\|.\|_\infty$.

p11

Def ⑩: une partie Y d'un espace métrique est dite relativement compacte si $Y\subset K$ où K compact ou encore si $\overline{Y}$ est compact.

Def ⑪: Une partie $H\subset\mathcal{C}^0(X)$ est dite équicontinue si $\forall x_0\in X$

p37

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall x\in X,\ d(x,x_0)<\eta \Rightarrow \forall h\in H,\ |h(x)-h(x_0)|\leq\varepsilon$

p38

Ex ⑫: • Une partie finie de $\mathcal{C}^0(X)$ est équicontinue

• Une suite uniformément convergente de fonctions de $\mathcal{C}^0(X)$ forme une partie équicontinue de $\mathcal{C}^0(X)$.

• L'ensemble des fonctions k-lipschitzienne où $k>0$ est équicontinu.

prop ⑬: Soient $(f_n)_n$ une suite équicontinue de $\mathcal{C}^0(X)$ et D une partie dense de X. Si $(f_n(x))$ converge $\forall x\in D$ alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f\in\mathcal{C}^0(X)$

Thm 14 (Ascoli) : Une partie de $\mathcal{C}^0(X)$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0(X)$ SSI elle est bornée et équicontinue.

application 15 : soient X et Y deux espaces métriques compacts, et $K \in \mathcal{C}^0(X \times Y)$, μ une mesure borélienne finie. soit

$$T : C^0(Y) \to C^0(X)$$
$$f \mapsto \left(Tf : x \mapsto \int_Y K(x,y) f(y) d\mu(y)\right)$$

alors $T\left(B_{C(Y)}(0,1)\right)$ est une partie relativement compacte de $\mathcal{C}^0(X)$ (on dit que T est un opérateur compact).

III. Espaces $\mathbb{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ — $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré.

Def 16 : soit $p \in [1, +\infty[$, on définit $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{C}$ mesurables, $\int_X |f|^p d\mu < +\infty \}$. (on le note plus simplement $\mathcal{L}^p$). On appelle $\mathbb{L}^p$ l'ensemble $\mathcal{L}^p$ quotienté par la relation d'équivalence "$=$ μ-pp". Pour tout $f \in \mathbb{L}^p$, on définit $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$. — BRi p 135

prop 17 : si $\mu(X) < +\infty$ alors $\forall\ 1 \leq p \leq q$, $\mathbb{L}^q \subset \mathbb{L}^p$. — p 136

Thm 18 : si $(f, g) \in \mathbb{L}^p \times \mathbb{L}^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q > 1$ alors $fg \in \mathbb{L}^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. — p 137

Thm 19 : soit $p \in [1, +\infty[$, alors $\forall f, g \in \mathbb{L}^p$,
$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$
en particulier, $(\mathbb{L}^p, \|.\|_p)$ est un evn. — p 139

Thm 20 : (Riesz-Fisher), $\forall p \in [1, +\infty[$, $(\mathbb{L}^p, \|.\|_p)$ est complet. De plus, de toute suite $(f_n)_n$ de $\mathbb{L}^p$, on peut extraire une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ telle que $f_{\varphi(n)} \to f$ μ-p.p. — p 143

prop 21 : (i) $\forall p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées est dense dans $\mathbb{L}^p$
(ii) L'ensemble $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact est dense dans $\mathbb{L}^p(\lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. — p 148

application 22 : soit $1 \leq p < +\infty$ et $a \in \mathbb{R}$, on définit $\forall f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$, $\tau_a(f) = f(\cdot - a)$. Alors $\forall f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$,
$\lim_{a \to 0} \|\tau_a(f) - f\|_p = 0$ ($a \mapsto \tau_a(f)$ est continue) — p 166 — BECK p 126

application 23 : soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors si $f \in \mathbb{L}^p$ et $g \in \mathbb{L}^q$, $f * g$ est uniformément continue et bornée. (où $f * g(x) = \int f(x-y) g(y) dy$) — HIR p 148 — BRi p 239

coro 24 : soit A un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure $\lambda(A) > 0$ alors, $A - A = \{ a - a', a, a' \in A \}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. — BRi p 241

Def 25 : On appelle suite régularisante une suite $(\rho_n)_{n \geq 1}$ de fonctions vérifiant :
- $\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ — $\int \rho_n = 1$
- $\text{supp}(\rho_n) \subset B(0, \frac{1}{n})$ — $\rho_n \geq 0$

— BREP 70

Ex 26 : notons $\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2 - 1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$ et $\rho_n = C n \rho(nx)$ où $C = \left(\int \rho\right)^{-1}$

Thm 27 : si $p \in [1, +\infty[$ et $f \in \mathbb{L}^p$, alors $p_n * f \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_p} f$

application 28 : $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p < +\infty$.

IV. Cas particulier de $\mathbb{L}^2(I, p)$

BECK p110

Def 29 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on appelle fonction poids une fonction $p : I \to \mathbb{R}$ mesurable et strictement positive telle que $\int_I |x|^n p(x)\,dx < +\infty$

On munit $\mathbb{L}^2(I,p) = \{ f : I \to \mathbb{C}$ mesurable, $\int_I |f|^2 p(x)\,dx < +\infty \}$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_I f(x)\overline{g(x)}\,p(x)\,dx$.

ce qui en fait un espace de Hilbert.

Def-prop 30 : Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux telle que $\deg(P_n) = n$. On l'appelle famille des polynômes orthogonaux.

Thm 31 : Soit p une fonction poids sur I non borné vérifiant : $\exists \alpha > 0$, $\int_I e^{\alpha|x|} p(x)\,dx < +\infty$. Alors les polynômes orthogonaux associés à p (renormalisés) forment une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(I,p)$

Ex 32 : • $I = [-1, 1]$, $p \equiv 1$, on obtient les polynômes de Legendre. $P_0 = 1$; $P_1 = X$; $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$; $P_3 = X^3 - \frac{5}{3}X$

• $I = \mathbb{R}$ et $p(x) = e^{-x^2}$, on obtient les polynômes de Hermite.

$P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - \frac{1}{2}$, $P_3 = X^3 - \frac{3}{2}X$.

Demailly p73 pour méthode quadrature

V. L'Espace $H_0^1(]0,1[)$

$X =]0,1[$, $\mu = \lambda$

BRE p120

Def 33 : Soit $f \in \mathbb{L}^1(]0,1[)$, on dit que f admet une dérivée faible si $\exists\, g \in \mathbb{L}^1(]0,1[)$ tel que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ $\int f\varphi' = -\int g\varphi$.

• on note alors $g = f'$ qui est unique.

• on note $H^1(]0,1[) = \{ f \in \mathbb{L}^2, f' \in \mathbb{L}^2 \}$ et on le munit du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{H^1} = \int fg + \int f'g'.$$

Thm 34 : $(H^1, \langle \cdot,\cdot \rangle_{H^1})$ est un espace de Hilbert. p121

Def 35 : on note $H_0^1(]0,1[)$ l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans H^1. C'est aussi un espace de Hilbert pour le produit scalaire induit par $\langle \cdot,\cdot \rangle_{H^1}$. p132

Thm 36 (Représentation de Riesz) : Soit $\varphi : H_0^1 \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue, alors il existe un unique $u \in H_0^1$ tel que $\langle u, v \rangle = \varphi(v)$ $\forall v \in H_0^1$.

plus général H Hilbert

application 37 : on considère le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad \text{où } f \in \mathbb{L}^2.$$

p136

alors il existe une unique solution faible $u \in H_0^1$ ie vérifiant $\int u'v' + \int uv = \int fv$ $\forall v \in H_0^1$

item sur continuité ds H^1 et caractérisation de H_0^1

Références :

[BECK] : Beck (Objectif Agrégation) pour IV
[BRE] : Brezis (Analyse fonctionnelle) pour régularisation et V
[BRI] : Briane (Théorie de l'intégration) pour III
[HIR] : Hirsch (Élément d'analyse fonctionnelle) pour I, II
[ZUI] : Zuily - Queffélec (Éléments d'analyse) pour 8