Cadre : - $(E, <.>)$ $\mathbb{R}$-ev euclidien de dim finie n
- $\mathcal{E}$ espace affine de direction E
- f application affine, $\vec{f}$ application linéaire associée.

I. Généralités sur les isométries et notion de distance

1) Applications affines

CA p 22

prop ①: soit $f : E \to F$ une application linéaire. $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ deux espaces affines dirigés par E et F. $\forall$ $O \in \mathcal{E}$, $O' \in \mathcal{F}$, il existe une unique application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ tq $\vec{\varphi} = f$ et $\varphi(O) = O'$.

cor ②: Soit $O \in \mathcal{E}$. Toute application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\varphi = t_u \circ \psi$ où t_u est la translation de vecteur u, ψ fixe O.
(on a aussi $\varphi = \psi \circ t_u$)

prop ③: L'application $GA(\mathcal{E}) \to GL(E)$, $\varphi \mapsto \vec{\varphi}$ est un homomorphisme de groupes surjectif
où $GA(\mathcal{E}) = \{\varphi$ affine bijective de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}\}$.

prop ④: Soit φ une application affine de $\mathcal{E}$. Elle admet un unique point fixe dans $\mathcal{E}$ SSI $\vec{\varphi}$ n'a aucun pt fixe autre que 0
SSI 1 n'est pas v.p de $\vec{\varphi}$.

2) Isométrie affine

Def ⑤: Un espace affine euclidien est un espace affine dirigé par un ev euclidien. On définit la distance entre deux points A et B par $d(A,B) = \|\vec{AB}\|$.

A p 25

Def ⑥: Une isométrie affine est une application affine tq $d(\varphi(A), \varphi(B)) \left(= \|\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}\|\right) = \|\vec{AB}\| = d(A,B)$ $\forall A, B \in \mathcal{E}$
ceci équivaut à dire que $\vec{\varphi}$ est une isométrie vectorielle
On appelle $O(E)$ et $Isom(\mathcal{E})$ l'ensemble des isom vecto et affines

Thm ⑦: $(O(E), \circ)$ et $(Isom(\mathcal{E}), \circ)$ sont des groupes.

Def ⑧: On dit qu'une isométrie (affine) est un déplacement si $\det(\vec{f}) = 1$ (ie $\vec{f} \in SO(E)$). sinon, c'est un anti-déplacement. On note $Isom^+(\mathcal{E})$ {des déplacements} sous groupe de $Isom(\mathcal{E})$ p 20

prop ⑨: soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une appli définie sur un espace affine euclidien, qui préserve les distances : $d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A,B)$. alors φ est une isométrie affine p 69

3) Distance et déterminant de Gram

ici E est préhilbertien $n \in \mathbb{N}$

Def ⑩: soit $x_1 \dots x_n \in E$, on appelle matrice de Gram de $x_1 \dots x_n$ ~~la matrice~~ $(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq k}$ et le déterminant de Gram est le déterminant de cette matrice, noté $G(x_1 \dots x_n)$. G p 254

Thm ⑪: Toute matrice de Gram est hermitienne positive. réciproquement, toute matrice hermitienne positive est une matrice de Gram.
De plus la matrice de Gram de $x_1 \dots x_n$ est définie SSI la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

app ⑫: soit V un sev de E de base $(e_1 \dots e_n)$. soit $x \in E$

alors la distance $d = d(x, V) = \inf\limits_{y \in V} \|x - y\|$ vérifie

$$d^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}.$$

p262 **app (13)** : Soit $n \in \mathbb{N}$, $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(a_1 \dots a_n) \longmapsto \int_0^1 (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 \, dx$$

φ admet un minimum μ, atteint en un unique point de $\mathbb{R}^n$ et $\mu = \frac{1}{(n+1)^2}$.

II. Étude de $O(E)$ et $Isom(E)$. E euclidien dim n

1) Premières propriétés et éléments remarquables

Thm (14) : soit $f \in \mathcal{L}(E)$ on a équivalence entre :

(i) $\forall x \in E \quad \|f(x)\| = x$

(ii) $\forall x, y \in E \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ Ap61 G p233

(iii) f envoie une b.o.n sur une b.o.n

(iv) si $\Omega = Mat_B[f]$ où B b.on alors ${}^t\Omega\Omega = Id_E = \Omega {}^t\Omega$.

application (15). $O(E)$ est compact

Thm (16) (réduction) Soit f une isométrie, il existe une b.o.n de E dans laquelle Ap65

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \varepsilon_s & & \\ & & & R_{\theta_1} & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix}.$$

où $\varepsilon_i = \pm 1$

$R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$ $\quad \theta_i \not\equiv 0 \ (\pi)$

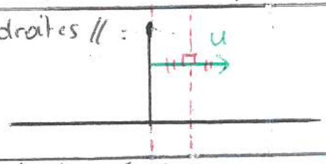
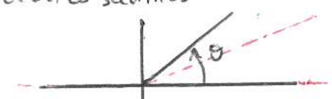
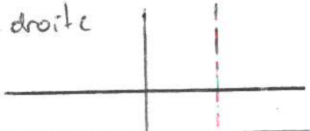
p66 **app (17)** $SO(E)$ est connexe par arc.

p54 **Def (18)** : si F sev de E, la symétrie orthogonale s_F est l'application qui vaut Id_F sur F et $-Id_{F^\perp}$ sur $F^\perp$ $\quad s_F \sim \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$

- si F est un hyperplan, s_F est appelée réflexion $\sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$
- si $\dim(F) = n-2$, s_F est un renversement $\sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$
- si $\dim(F) = 1$, s_F est un retournement. $\sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$.

Def (19) : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ c'est une anti-rotation d'axe la droite engendrée par le premier vecteur de la base (tout élément de $SO_3(\mathbb{R})$ s'écrit ainsi dans une b.o.n) p143

2) Classification des isométries $n = 2$ ou $n = 3$

$n=2$	$\vec{\varphi}$	point fixe	invariants	décompositions en réflexions
translation	id_E (déplacement)	aucun	- pas de pts invariants - une direction de droite	2 droites // : 
rotation	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ déplacement	un point fixe	pas de droite invar	2 droites sécantes 
réflexions	réflexion droite $\mathcal{D}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ anti-déplac^t	une droite	une direction de droite	1 droite 
symétrie glissée	réflexion $\mathcal{D}$ (anti-déplac^t)	aucun	une unique droite invariante	3 droites 

p87

$n=3$	$\vec{u}$	points fixes	déplacements
translation	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	aucun	déplacement
réflexion	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	il existe un point fixe	anti-déplacement

symétrie glissée orthogonale	$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$	pas de point fixe	antidéplacement
rotation	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$	il existe un point fixe	déplacement
vissage	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$	pas de point fixe	déplacement
anti-rotation	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$	un unique point fixe	anti-déplacement

p 146

3) Générateurs (à mettre avant le 2))

p 56-57

Thm ⑳ : Toute isométrie $f \in O(E)$ est produit de $r = rg(f - id_E)$ réflexions.

Thm ㉑ : toute isométrie de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme composée de p réflexions $p \leq n+1$

Thm ㉒ : si $n \geq 3$, $SO(E)$ est engendré par les renversements

prop ㉓ : $Isom(\mathcal{E})^+$ est connexe par arcs. (ce qui a donné le nom de déplacement

p 88

III. Liens avec les polyèdres en dimension 3

Def ㉔ : Un polyèdre convexe de E (dim 3) est régulier si toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques et si en chaque sommet, elles s'assemblent de la même façon au sens où les figures formées par la réunions des arêtes aboutissant à un sommet sont isométriques.

p 151

Ex ㉕ : tétraèdre, cube, octaèdre.

(culture : il n'y a que 5 polyèdre régulier, les 2 autres sont le dodécaèdre, et l'icosaèdre.

Thm ㉖ : $Isom(T_4) \simeq S_4$ et $Isom^+(T_4) \simeq A_4$

app ㉗ : Table de caractère de S_4.

	id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_T	3	1	0	-1	-1
$\chi_2\chi_T$	3	-1	0	$\cancel{-1}$	-1
χ_5	2	0	-1	0	2

Rq ㉘ : On peut lire les groupes distingués de $\mathcal{S}_4$ sur cette table de caractère.

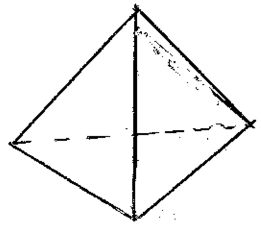
H_1G_2 ?

Références : [A] : Michèle Audin (Géométrie)

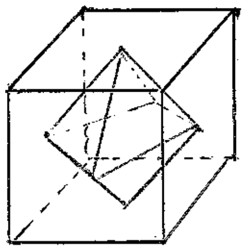
[G] : Gourdon Algèbre (pour Gram)

DVP : ① déterminant de Gram et distance [A2] et [A3] [G]

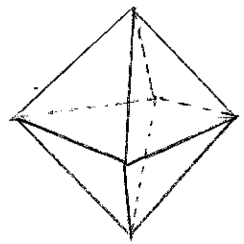
② générateurs de $O(E)$, $SO(E)$ $Isom(E)$ (FGN + A)



Tétraèdre T_1



cube



octaèdre