151 Endomorphismes trigonalisables . Endomorphismes nilpotents

Dans cette leçon, E désigne un $\mathbb{K}$-ev de dim finie où $\mathbb{K}$ est un corps. On suppose connu les notions de polynôme minimal μ_f et polynôme caractéristique χ_f.

I. Endomorphismes trigonalisables

A. Def et caracté

GOU p 163

Def 1 : - soit $f \in \mathcal{L}(E)$. on dit que f est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $[f]_{\mathcal{B}}$ est triangulaire supérieure.

- une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure. (ie $\exists\, T$ triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$ où $P \in GL_n(\mathbb{K})$).

HAU p

Rq 2 : . f diagonalisable $\Rightarrow$ f trigonalisable.
La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

. On note alors $C_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A$ est diagonalisable à v.p distinctes$\}$

$D_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A$ diagonalisable$\}$

$T_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A$ est trigonalisable$\}$.

GOU p 163

Thm 3 : f est trigonalisable $\Leftrightarrow$ μ_f est scindé
$\Leftrightarrow$ χ_f est scindé
$\Leftrightarrow$ $\exists\, P$ scindé tq $P(f) = 0$

cor 4 : . $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = T_n(\mathbb{C})$
. si $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable, alors si F est un sev stable par f, on a : $f_{|F}$ trigonalisable car $\chi_{f_{|F}} \mid \chi_f$.

B. Topologie.

On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

BEC p 178

Rq 5 : On a : $C_n(\mathbb{K}) \subset D_n(\mathbb{K}) \subset T_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

prop 6 : . on a : $\overline{C_n(\mathbb{K})} = T_n(\mathbb{K})$ (donc $\overline{D_n(\mathbb{K})} = T_n(\mathbb{K})$)

cor 7 : . $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = T_n(\mathbb{C})$
. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_A(A) = 0$
. $T_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

C. Trigonalisation simultanée

prop 8 : si f et g commutent, alors :
. les sous-espaces propres de f sont stables par g

GOU p 170 exo 4

Def 9 : Une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'endomorphismes de E est dite co-trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\forall i \in I$ $[f_i]_{\mathcal{B}}$ est triangulaire supérieure.

Thm 10 : (trigonalisation simultannée) si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille d'endomorphismes qui commutent 2 à 2, alors $(f_i)_{i\in I}$ est co-trigonalisable.

Rq 11 : la réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

application : 12 : si f et g sont trigonalisables et commutent alors $f+g$ et $f\circ g$ sont trigonalisable

II. Endomorphismes nilpotents.

Def 13 : On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$. L'indice de nilpotence de f est alors $n_f = \min\{p \in \mathbb{N},\ f^p = 0\}$.

prop 14 : si f est nilpotent d'indice r, alors $\mu_f = X^r$ et dans ce cas, $r \leq n = \dim(E)$.

prop 15 : f est nilpotent $\iff \chi_f = X^n$
$\iff$ f est trigonalisable et admet 0 pour unique valeur propre

Ex 16 : 0 est la seule valeur propre de f n'implique pas que f est nilpotent : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet pour unique valeur propre 0 sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

prop 17 : si f est nilpotent, alors $id_E - f$ est inversible.

application 18 : soit $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & & 0 \\ & 1 & \end{pmatrix}$ ($i \neq j$) et $T_{ij} = I_n + \lambda E_{ij}$. alors T_{ij} est inversible et $T_{ij}^{-1} = I_n - \lambda E_{ij}$.

prop 19 : soit f un endomorphisme de E $\mathbb{K}$-ev où $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. Alors :
f est nilpotent $\iff \operatorname{tr}(f^k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Thm 20 (théorème de Burnside) : Tout sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini (ie $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $A^N = I_d \ \forall A$ dans ce ss-groupe) est fini.

prop 21 : si f et g commutent, et sont nilpotents, alors $f+g$ et $f \circ g$ sont nilpotents.

Rq 22 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente mais $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une somme de nilpotente.

prop 23 : Soit $N(E) = \{f \in \mathcal{L}(E),\ f \text{ est nilpotent}\}$ alors :
- $N(E)$ est un cône.
- $\operatorname{vect}(N(E)) = \{f \in \mathcal{L}(E),\ \operatorname{tr}(f) = 0\}$

III. Application à la réduction

A. Décomposition de Dunford

Thm 24 : (Décomposition de Dunford). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que f est trigonalisable (ie son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$). Il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tel que
(i) d est diagonalisable, n est nilpotent
(ii) $f = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$
(iii) d et n sont des polynômes en f.

Thm 25 : (lemme des noyaux). soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 \cdots P_k \in \mathbb{K}[X]$, les polynômes P_i étant 1er entre eux deux à deux. Alors :
$$\ker P(f) = \ker P_1(f) \oplus \cdots \oplus \ker P_k(f).$$

Rq 26 : la condition χ_f scindé est nécessaire car si f admet une décomposition de Dunford, alors $f = d + n$ avec d et n co-trigonalisables car ils commutent donc f est nécessairement trigonalisable.

GOU p176 ou p161
G ... p151 et 136 pbm 9
FRA p172
GOU p193
GOU p173
FRA p113

GOU p 154 FRA p 114

Application 27 : • Calcul de puissance : f^p
• Calcul d'exponentielle : e^f
• $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to Gl_n(\mathbb{C})$ est surjective.
• f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ e^f est diagonalisable
• soit $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ alors φ n'est pas continue
$M = D+N \longmapsto D$

B. Réduction de Jordan

Thm 28 : (Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent)
soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f a la forme :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & v_{n-1} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } v_i \in \{0,1\} \ \forall i$$

Rq 29 : Une reformulation de ce théorème est de dire que $[u]_{\mathcal{B}}$ est* constituée de blocs nuls est de blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ * diagonale par bloc et.
que l'on appelle bloc de Jordan

GOU p 195

Thm 30 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$:
on note $\chi_f = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $[f]_{\mathcal{B}}$ est une matrice diagonale par bloc :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{pmatrix}$$

où $A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & v_{i,1} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & v_{i,\alpha_i-1} \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ est une matrice de taille α_i : $v_{i,j} \in \{0,1\} \ \forall i,j$

MAN p114

prop 31 : Soit f nilpotent de matrice dans une base $\begin{pmatrix} J_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_r} \end{pmatrix}$ où $J_{d_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{d_i}(\mathbb{K})$

alors le nombre de blocs de Jordan de taille k de f est $2\dim(\ker(f^k)) - \dim(\ker(f^{k-1})) - \dim(\ker(f^{k+1}))$

Ref: [GOU] : Gourdon Algèbre
[BEC] : Beck objectif agreg.
[FRA] : Francinou, Algèbre 2
[HAU] : Hauchecorne, Contre exemples
[MAN] : Mansuy, Réduction des endo.