156 Exponentielle de matrices. Applications

Dans cette leçon, $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

I. Définitions et premières propriétés

NH2G2 p355

Def 1 : on définit l'application exponentielle comme suit :

$$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$
$$A \longmapsto \exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

prop 2 : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge normalement sur tout compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

coro 3 : exp est une application continue.

prop 4 : (i) si $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$

(ii) $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) \subset GL_n(\mathbb{K})$

(iii) $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$

(iv) si $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

(v) $\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)$ et $\exp(\bar{A}) = \overline{\exp(A)}$

prop 5 : le spectre de $\exp(A)$ est $\{e^\lambda, \lambda \in Sp(A)\}$

application 6 : $\det(\exp(A)) = e^{Tr(A)}$

Remarque 7 : si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$

prop 8 : soit N une matrice nilpotente, alors $\exp(N) - I_n$ est nilpotente.

II. Calcul de l'exponentielle : Dunford

Def 9 : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet une décomposition de Dunford si il existe D diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et N nilpotente telles que $DN = ND$ et $A = D + N$.

Thm 10 : si χ_A qui est le polynome caractéristique de A est scindé, alors A admet une décomposition de Dunford sur $\mathbb{K}$, unique.
En particulier, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une décomposition de Dunford.

FGN p114 ou NH2G2 p381

prop 11 : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $A = D + N$ sa décomp de Dunford, alors : si $N^r = 0$:

(i) $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$

(ii) $\exp(A) = \exp(D) + \exp(D) \cdot \sum_{k=1}^{r-1} \frac{N^k}{k!}$ est la décomposition de Dunford de $\exp(A)$

coro 12 : A est diagonalisable SSI $\exp(A)$ l'est.

Ex 13 : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\exp(A) = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$

III. Surjectivité et restrictions remarquables

ZAV p48-49 NH2G2 p359

prop 14 :
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$
- exp est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Thm 15 : (i) $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

(ii) $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \{A^2, A \in GL_n(\mathbb{R})\}$ est surjective

application 16 : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$

NH2G2 p356

Rq 17 : l'exponentielle n'est pas injective sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \exp\begin{pmatrix} 0 & 2k\pi \\ -2k\pi & 0 \end{pmatrix} = I_2 .$$

(elle l'est sur $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ mais pas sur $\mathcal{M}_1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$).

FGN p116

prop 18 : exp est injective sur $D_n(\mathbb{R})$ (mais pas sur $D_n(\mathbb{C})$)

Def 19 : on note $S_n(\mathbb{R})$ (resp $H_n(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp hermitiennes). On note aussi $S_n^{++}(\mathbb{R})$ (resp $H_n^{++}(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp hermitiennes) définies positives.

NH2G2 p357

Thm 20 : Les applications $\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\exp : H_n(\mathbb{C}) \longrightarrow H_n^{++}(\mathbb{C})$ sont des homéomorphismes.

IV Logarithme d'une matrice

NH2G2 p358

prop 21 : l'exponentielle est différentiable en 0 et sa différentielle est Id, c'est donc un difféomorphisme local sur un voisinage de 0.

On peut donc définir $\exp^{-1}$ sur un voisinage de I_n.

MNE p57

application 22 : $GL_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits : $\exists V$ voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{K})$ tel que le seul sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ inclu dans V soit $\{I_n\}$.

NH2G2 p356

Def 23 : pour $\|.\|$ une norme subordonnée, on définit le logarithme d'une matrice dans $B(I_n, 1)$: si $\|H\| < 1$

$$\log(I_n + H) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{H^k}{k}$$

NH2G2 p376

prop 24 : si N est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $L = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{N^k}{k}$. alors $\exp(L) = I_n + N$.
L est alors un logarithme de $I_n + N$.

p378

Thm 25 : notons $\mathcal{N}(n)$ le cone nilpotent et $\mathcal{U}(n)$ l'ensemble des matrices U telles que $U - I_n$ est nilpotente. Alors

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{N}(n) &\longrightarrow \mathcal{U}(n) \\ N &\longmapsto \exp(N) \end{aligned}$$ est un homéomorphisme

Ex 26 : $\log\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Plus généralement :

$$\log\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & \frac{(-1)^n}{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 & -\frac{1}{2} \\ & 0 & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

V. Lien avec les équations différentielles

DEM p181

Def 27 : Un système différentiel linéaire du 1er ordre dans $\mathbb{K}^m$ est une équation $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ $*$
où $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$ et $A : \begin{aligned} I &\longrightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{K}) \\ t &\longmapsto A(t) \end{aligned}$ $\quad B : \begin{aligned} I &\longrightarrow \mathbb{K}^m \\ t &\longmapsto B(t) \end{aligned}$
sont continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$.

DEM p 182+134

Thm 28 : Par tout point $(t_0, V_0) \in I \times \mathbb{K}^m$ passe une unique solution maximale globale (définie sur tout I) de $(*)$

DEM p 186-7

Thm 29 : • La solution de $Y'(t) = AY(t)$ tq $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $Y(t_0) = V_0$ est $Y(t) = \exp((t-t_0)A).V_0$

• La solution de $Y'(t) = AY + B(t)$ tq $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $Y(t_0) = V_0$ est $Y(t) = \exp((t-t_0)A).V_0 + \int_{t_0}^{t} \exp((t-u)A)B(u)du$

DEM p 200

application 30 : soient b et c deux fonctions continues sur $I = [0, \tau[$ fixé. le système différentielle linéaire à coefficient constant $(S) \begin{cases} x' = y + b(t) \\ y' = 2x - y + c(t) \end{cases}$

est équivalent à $Y'(t) = AY(t) + B(t)$ où :

$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B(t) = \begin{pmatrix} b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$.

Les solutions général de ce système sont donc données par le théorème précédent.

DEM p 195

Def 31 : On considère désormais une équation linéaire (E_0) $Y' = A(t)Y$. où $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $t \mapsto A(t)$ est continue. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E_0).

$\forall t_0 \in I$, $\phi_{t_0} : \mathcal{S} \to \mathbb{K}^m$, $Y \mapsto Y(t_0)$ est un isomorphisme.

$\forall (t, t_0) \in I^2$, on définit $R(t, t_0) = \phi_t \circ \phi_{t_0}^{-1} : V \in \mathbb{K}^m \xmapsto{\phi_{t_0}^{-1}} Y \in \mathcal{S} \xmapsto{\phi_t} Y(t)$

$R(t, t_0)$ s'appelle la résolvante de (E_0).

DEM p 196

prop 32 : (i) $\forall t \in I$, $R(t,t) = I_m$

(ii) $\forall (t_0, t_1, t_2) \in I^3$ $R(t_2, t_1) R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$

(iii) $R(t, t_0)$ est la solution dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ du système $\Pi'(t) = A(t)\Pi(t)$ où $\Pi(t) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ vérifie $\Pi(t_0) = I_m$

(iv) La solution au problème de Cauchy $\begin{cases} Y' = A(t)Y \\ Y(t_0) = V_0 \end{cases}$ est $Y(t) = R(t, t_0).V_0$

Ex 33 : Supposons que $A(t)A(u) = A(u)A(t)$ $\forall t, u \in I$, alors $R(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(u)du\right)$

Références:

[DEM] Demailly (analyse numérique et ED) (partie V)
[FGN] Francinou (Algèbre 2)
[ΠNE] Πneimné / Testard (intro à la théorie des groupes de Lie)
[NH2G2] Caldero (Nouvelles histoires ...) (75%)