E est un $\mathbb{K}$-ev de dim finie, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$ que l'on identifiera à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose connues les notions de valeurs propres, vecteurs propres, s-ev propres E_λ, polynôme minimal μ_f et caractéristique χ_f, polynômes d'endomorphismes.

I. Critères de diagonalisation

[...] p175

prop ① : (lemme des noyaux) : soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 \ldots P_n \in \mathbb{K}[X]$ les P_i étant premiers entre eux 2 à 2, alors :
$\ker P(f) = \ker P_1(f) \oplus \ldots \oplus \ker P_n(f)$.

p163

Def ② : On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs de f. ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.

Thm ③ : On a équivalence entre :
(i) f est diagonalisable
(ii) χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute racine λ_i de χ_f de multi h_i, on a $h_i = \dim(E_{\lambda_i})$.
(iii) Il existe des v.p $\lambda_1 \ldots \lambda_p$ de f tq $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$.

cor ④ : si χ_f est scindé à racines simples, alors f est diagonalisable.

p167

Ex ⑤ : $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Thm ⑥ : f est diagonalisable
$\iff \exists P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tq $P(f) = 0$
$\iff \mu_f$ est scindé à racines simples.

p175

Ex ⑦ : • un projecteur p est diagonalisable
• une symétrie s est diagonalisable sur un corps $\mathbb{K}$ de car $\neq 2$

cor ⑧ : si f diagonalisable et F stable par f Alors $f_{|F}$ est diagonalisable. p164

prop ⑨ : soit $\mathbb{K}$ un corps fini à q éléments, alors f est diagonalisable SSI $f^q = f$. p178

* dénombrement des matrices diagonalisables sur $\mathbb{F}_q$

Thm ⑩ (diagonalisation simultanée) si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux, et sont diagonalisables alors il existe une base commune de diagonalisation. (les f_i sont co-diagonalisables). p166

La réciproque est vraie. **app ⑩'** : $GL_n(\mathbb{K}) \simeq GL_m(\mathbb{K}) \iff m = n$ si car$(\mathbb{K}) \neq 2$

II. Décomposition de Dunford

Def ⑪ : f est dit nilpotent SSI $\exists p \in \mathbb{N}$, $f^p = 0$. En particulier, f diagonalisable et nilpotent $\iff f = 0$.

Thm ⑫ : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tel que : p195
(i) d est diagonalisable, n nilpotent
(ii) $f = d + n$, $d \circ n = n \circ d$
de plus, d et n sont des polynômes en f

app ⑬ : • $\exp\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$

app ⑭ : si χ_A est scindé, $A = D + N$ sa décomp de Dunford alors $e^A = e^D + e^D \sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$ est celle de e^A. En particulier, A est diagonalisable SSI e^A est diagonalisable FGN p114

III. Résultats topologiques.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de sa norme euclidienne quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

G p164 **Def 15** : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit trigonalisable si sa matrice dans une base est triangulaire supérieure.

p186 **prop 16** : l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Faux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

prop 17 : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable SSI χ_M est scindé

application 18 : • soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\chi_M(M) = 0$.

• $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto (D, N) \in (\mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{N}_n(\mathbb{C}))$ n'est pas continue

G p194 (R) + p 694 **prop 19** : $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{vect}(\mathcal{D}_n(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

trigonalisable

prop 20 : $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est connexe pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Thm 21 : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable SSI $\{PMP^{-1},\ P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ est fermé.

IV Réduction dans un ev euclidien

ici, E est un $\mathbb{R}$-ev euclidien, on note f^* l'adjoint de f

RDO p111 **Def 22** : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $f \circ f^* = f^* \circ f$ (si M est la matrice de f dans une base, M est normale si ${}^tM M = M {}^tM$.)

p 78 **Lemme 23** : soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\exists F$ sev de E de dimension 1 ou 2 stable par f.

prop 24 : si f est normal, et F un sev stable par f, alors F et $F^\perp$ sont stables par f et f^*.

Thm 25 (Réduction des endomorphismes normaux) : Soit f normal alors E est somme directe orthogonale d'une famille $(E_k)_{k=1}^{m}$ de sev tq $\forall k$, $\dim(E_k) \in \{1, 2\}$, stable par f et

$\begin{cases} f_{|E_k} = \lambda_k Id_{E_k} & \text{si } \dim(E_k) = 1 \\ f_{|E_k} \text{ est une similitude directe} \neq \text{homothétie} \end{cases}$

autrement dit, $\exists P \in O(n)$, $M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \tau_1 & \\ 0 & & & & \ddots \; \tau_s \end{pmatrix} {}^tP$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ $b_i \neq 0$ et M est la matrice de f ds la base canonique.

Def 26 : f est dit orthogonal si $f^* f = f f^* = id_E$. Il est dit auto adjoint si $f = f^*$. (ils sont en particulier normaux.

coro 27 : si f est autoadjoint, alors f est diagonalisable en base orthonormée.

cor 28 : si f est orthogonal, alors sa matrice dans une base est de la forme
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \varepsilon_r & & \\ & & & R_{\theta_1} & \\ 0 & & & & \ddots \; R_{\theta_s} \end{pmatrix}$$
où $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$

$R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$ est la rotation d'angle θ_i.

application 29 : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Thm 30 : si E est un ev hermitien, et f est normal sur E (ie $f = f^*$, $M^* = M$ où $M^* = {}^t\overline{M}$) alors f est diagonalisable en b.o.n. p112 cor ㉛ : si f est hermitienne sur E ($f^* = f$) alors f est diagonalisable en b.on et ses v.p sont réelles.

Références :

FGN : Oraux X-ENS Algèbre 2 (14)
[G] : Gourdon Algèbre
[R] : Rombaldi (maths pour agrég) (20)
[RDO3] : Ramis, Deschamps, Odoux Algèbre Tome 2. (IV)

DVP1 Endom normaux [23, 24, 25]
Dunford [12].