154 Sous Espaces Stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Dans cette leçon, $E$ désigne un ev sur un corps $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \geq 1$. On note $f$ un endomorphisme de $E$, $\chi_u$ son polynôme caractéristique, $\mu_u$ son polynome minimal.

## I. Définitions et premières propriétés.

MAN p17

**Def ①**: Soit $f$ un endomorphisme de $E$. Un sev $F$ de $E$ est stable par $f$ si $f(F) \subset F$

p18

**Exemple ②**: • $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont stables par $f$
• si $f$ est une homothétie, tous les sev de $E$ sont stables.

p28

**prop ③**: soient $f, g \in \mathrm{End}(E)$ tq $f \circ g = g \circ f$, alors $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont stables par $f$, et les sous-espaces propres de $g$ sont stables par $f$.

p17

**coro ④**: $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\ker(P(f))$ et $\mathrm{Im}(P(f))$ sont stables par $f$

p19

**Ex ⑤**: • Les espaces caractéristiques de $f$ sont stables par $f$
• soit $p$ un projecteur. $F$ est stable par $p$ SSI $F$ est la somme directe d'un sev de $\mathrm{Im}(p)$ et d'un sev de $\ker(p)$

p17

**prop ⑥**: (i) si $F$ est stable par $f$ et $g$, alors il l'est par $f+g$, et $f \circ g$
(ii) si $F$ et $G$ sont deux sev de $E$ stables par $f$, alors $F+G$ et $F \cap G$ le sont aussi.

p24 (idée preuve)

**application ⑦**: soit $1 \leq k \leq n-1$. si $f$ laisse stable tous les sev de dimension $k$, alors $f$ est une homothétie.

## II. Endomorphismes induits

p18

**Def ⑧**: si $F$ est un sev stable alors l'endomorphisme induit par $f$ sur $F$ est $f_{|F} : \begin{array}{l} F \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$.

**prop ⑨**: $F$ un sev de $E$ est stable par $f$ SSI $\forall \mathcal{B}_F$ base de $F$ compléter en une base $\mathcal{B}$ de $E$, on a

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} A \in \mathcal{M}_{\dim(F)}(\mathbb{K}) \\ B \in \mathcal{M}_{\dim(F), n-\dim(F)}(\mathbb{K}) \\ C \in \mathcal{M}_{n-\dim(F)}(\mathbb{K}) \end{array}.$$

MAN p18

**prop ⑩**: • si $F$ stable par $f$, alors $\mu_{f_{|F}} \mid \mu_f$ et $\chi_{f_{|F}} \mid \chi_f$.
• si $E = F \oplus G$ avec $F$ et $G$ stables par $f$, alors $\mu_f = \mathrm{ppcm}(\mu_{f_{|F}}, \mu_{f_{|G}})$.

**coro ⑪**: si $\chi_f$ est irréductible, les seuls espaces stables de $E$ par $f$ sont $\{0\}$ et $E$.

FDO p78

**prop ⑫**: Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-ev $E$ de dimension finie $n > 0$, alors il existe un sev $F$ de $E$ de dimension 1 ou 2 stable par $f$.

## III. Dualité.

GOU p127-128

**Def ⑬**: si $A \subset E$ et $E^*$ est le dual de $E$, on note $A^{\perp *} = \{ \varphi \in E^*, \forall x \in A, \varphi(x) = 0 \}$ qui est un sev de $E^*$

**prop ⑭**: si $F$ sev de $E$ alors $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E)$

**Def ⑮**: Soit $f \in E^*$, on note ${}^t f : \begin{array}{l} E^* \to E^* \\ \varphi \mapsto \varphi \circ f \end{array}$

p129

**prop ⑯**: soit $f \in \mathrm{End}(E)$. Un sev $F$ de $E$ est stable par $u$ SSI $F^{\perp *}$ est stable par ${}^t u$.
• Ce résultat est extrement utile pour faire des raisonnements par récurrence sur la dimension d'un ev relatifs à la réduction.

## IV. Réduction (diagonalisation et trigonalisation)

GOU p173

**Thm 17** : (lemme des noyaux) soit $f \in End(E)$ et $P = P_1 \dots P_n \in \mathbb{K}[X]$ tq $P_i$ premier entre eux 2 à 2. alors
$$\ker(P(f)) = \ker(P_1(f)) \oplus \dots \oplus \ker(P_n(f)).$$

**coro 18** : (i) E est somme directe de sous espaces stables par $f$

GOU p173

(ii) $f$ est diagonalisable ssi $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tq $P(f) = 0$

(iii) si F est stable par $f$ et $f$ diagonalisable, alors $f_{|F}$ aussi

GOU p170

**prop 19** : soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E qui commutent 2 à 2

(i) si les $f_i$ sont diagonalisables, ils sont co-diagonalisables

(ii) si les $f_i$ sont trigonalisables, ils sont co-trigonalisables

## V. Réduction des endomorphismes normaux

RDO p78

**Def 20** : soit E un ev euclidien et $f \in End(E)$. On note $f^*$ l'adjoint de $f$. On dit que $f$ es normal si $f^* f = f f^*$

p78

**lemme 21** : soit $f$ un endomorphisme normal de E (euclidien) et F un sev stable par $f$. Alors F et $F^\perp$ (pour produit scalaire) sont stables pour $u$ et $u^*$

p79

**Thm 22** : soit $f \in End(E)$ normal alors E est somme directe orthogonale d'une famille $(E_k)_{k=1\dots n}$ de sev tq $E_k$ soit de dimension 1 ou 2, stable par $f$ et $u_{|E_k} = \lambda_k Id$ si $\dim(E_k) = 1$ ou $[u]_{B_{E_k}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $b \neq 0$ si $\dim(E_k) = 2$.

**application 23** : réduction des endomorphismes symétriques

## VI. Endomorphismes cycliques

MAN p19

**Def 24** : soit $f \in End(E)$ et $x \in E$. Le sev cyclique associé noté $E_{f,x}$ ou $E_x$ est le plus petit sev stable par $f$ contenant $x$. En fait, $E_x = vect(f^k(x), k \in \mathbb{N})$.

MAN p4

**prop 25** : si $x \in E$, il existe un unique polynome unitaire noté $\mu_{f,x}$ ou $\mu_x$ qui engendre $I = \{P \in \mathbb{K}[X], P(f)(x) = 0\}$
on l'appelle polynome minimal local en $x$.
- $\dim(E_x) = \deg(\mu_x)$.

p63

**Def 26** : $f \in End(E)$ est cyclique si $\exists x \in E$, $E = E_x$

p64

**Ex 27** : un élément $f \in End(E)$ où $\dim(E) = 2$ est soit une homothétie, soit cyclique.
- un endomorphisme de E de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est cyclique.

MAN p64 p67
FGN p123

**Thm 28** : $f$ est cyclique $\iff \deg(\mu_f) = n$
$\iff \exists \mathcal{B}$ base de E pour laquelle
$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$
cette matrice est appelée matrice de compagnon du polynôme $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i + X^n$ (ici, $P = \mu_f$) notée $C(P)$

MAN p133

**Thm 29** : (Réduction de Frobénius) Soit $f \in End(E)$, Alors il existe (une unique) suite finie de polynômes unitaires $P_1 \dots P_r$ tq $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $P_{i+1} \mid P_i$ et $\exists$ une base $\mathcal{B}$ de $E$ tq :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} C(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C(P_r) \end{pmatrix}$$

la suite $(P_i)_{i=1}^{r}$ est la suite des invariants de similitude de $f$

## VII. Représentations de groupes

ici, $E$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $G$ un groupe fini.

SER p15

**Def 30** : une représentation de $G$ dans $E$ est un homomorphisme $\rho : G \longrightarrow GL(E)$
$s \longmapsto \rho_s$

p17

**Def 31** : • un sev $F$ de $E$ est dit stable par une représentation $\rho$ si $\forall s \in G$, $W$ est stable par $\rho_s$ et dans ce cas $\rho_{|F} : G \longrightarrow GL(F)$
$s \longmapsto \rho_s$
est la sous représentation de $\rho$ associée à $W$.

• si $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ où $F_i$ stable par $\rho$ alors on dit que $\rho$ est la somme directe des sous-représentations $\rho_i : G \to GL(F_i)$ et on note $\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} \rho_i$

**Def 32** : Une représentation $\rho : G \longrightarrow GL(E)$ est dite irréductible si $E \neq \{0\}$ et si $E$ possède exactement deux sous-ev stables par $\rho$ SER p19

**Thm 33** : soit $\rho : G \longrightarrow GL(E)$ et $F$ un sev stable par $\rho$. Il existe un supplémentaire $F^\circ$ de $F$ stable par $\rho$ SER p18

**Thm 34** : Toute représentation est somme directe d'un nombre fini de représentations irréductibles. p19

Références : [FGN] : Francinou (Oraux X-ENS 2) (Thm 28)
[GOU] : Gourdon (Algèbre) (Partie II, IV)
[MAN] : Mansuy (Algèbre linéaire Réduction) (70%)
[RDO] : Ramis, Deschamps, Odoux (cours spécial) (Partie V) + prop 12
[SER] : Serre (Représentations linéaires des groupes finis) (Partie VII)