153 Polynômes d'endomorphismes. Réduction d'endomorphisme. Application

Dans cette leçon, $\mathbb{K}$ désigne un corps et $E$ un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

## I. L'Algèbre $\mathbb{K}[f]$.

**Def ①** : soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $\forall P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrivant
$$P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$$
L'endomorphisme $P(f)$ est défini par $P(f) = \sum_{k=0}^{N} a_k f^k$. MAN p1

**Rq ②** : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit de même $P(A)$ qui est la matrice de l'endomorphisme $P(f)$ dans une base $\mathcal{B}$ si $A$ est la matrice de $f$ dans cette même base. p2

**prop ③** : L'application $\varphi_f : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(f)$ est un morphismes d'algèbres. Son image est notée $\mathbb{K}[f]$ qui est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.
On note également $I_f = \ker(\varphi_f)$.

**prop ④** : $I_f$ est un idéal principal de $\mathbb{K}[X]$.

## II. Polynômes annulateurs

**Def ⑤** : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $P$ est un polynôme annulateur de $f$ si $P(f) = 0$

**Ex ⑥** : . soit $p$ un projecteur de $E$ alors $X^2 - X$ annule $p$ p3-4
. le seul endomorphisme qui admet $aX+b$ comme polynôme annulateur est $f = -\frac{b}{a} Id_E$ où $a \neq 0$

**application ⑥'** : les polynômes annulateurs sont utiles pour calculer les puissances d'une matrices par exemples.

**prop ⑦** : Tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ admet un polynôme annulateur non nul p2

**Contre-Ex ⑧** : ce résultat est faux en dimension infinie comme le montre l'exemple de $D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto P'$ p3

**Def ⑨** : on note $\mu_f$ l'unique polynôme unitaire qui engendre $I_f$. Il est appelé polynôme minimal de $f$. p4

**prop ⑩** : $\dim(\mathbb{K}[f]) = \deg(\mu_f)$

**Ex ⑪** : si $f$ est nilpotent, $\mu_f$ est de la forme $X^r$ où $r$ est l'indice de nilpotence de $f$. p4

**prop ⑪** : . si $\lambda$ est une valeur propre de $f$, alors $\mu_f(\lambda) = 0$ GOU p174 MAN p5
. si $P$ annule $f$ et $P(0) \neq 0$, alors $f$ est inversible et son inverse est un polynôme en $f$.
. $f$ est inversible SSI $0$ n'est pas racine de $\mu_f$.

**prop ⑫** : . soit $F$ un sous-espace stable par $f$ alors : $\mu_{f_{|F}} \mid \mu_f$ MAN p18
. si $E = F \oplus G$ avec $F$ et $G$ stables par $f$, alors $\mu_f = \text{ppcm}(\mu_{f_{|F}}, \mu_{f_{|G}})$.

**Def ⑬** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le polynôme caractéristique de $A$ est $\chi_A = \det(XI_n - A)$ unitaire de degré $n$ MAN p50

**prop ⑭** : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_{P^{-1}AP} = \chi_A$.

**Thm ⑮** (Cayley-Hamilton) : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_A(A) = 0$ p25

**coro ⑯** : $\lambda$ est une v.p de $A \iff \lambda$ est une racine de $\mu_A$ $\iff \lambda$ est une racine de $\chi_A$ p54

**Def ⑰** : soit $\lambda$ une v.p de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors on note $m_A(\lambda)$ la multiplicité de $\lambda$ comme racine de *p 52*

## III. Diagonalisation et trigonalisation

**Thm ⑱** : (lemme des noyaux) soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 \dots P_n \in \mathbb{K}[X]$ avec $P_i$ premier entre eux 2 à 2, alors *GOU p175*

$$\ker P(f) = \ker(P_1(f)) \oplus \dots \oplus \ker(P_n(f))$$

**Def ⑲** : $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de $f$. (ie SSI sa matrice est diagonale dans une base). *GOU p163-4*

- $f$ est trigonalisable est trigonalisable si $\exists$ une base dans laquelle sa matrice soit triangulaire supérieure.

**Thm ⑳** : soit $f \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre : *p164 et 175*

(i) $f$ est diagonalisable

(ii) $\chi_f$ est scindé et toute racine $\lambda$ de $\chi_f$ vérifie $m_f(\lambda) = \dim(\underbrace{\ker(f - \lambda id_E)}_{=: E_\lambda})$

(iii) il existe des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tq $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$

(iv) $\exists P$ scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$ tq $P(f) = 0$

**Thm ㉑** : $f$ est trigonalisable SSI $\chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ *p 164*

**application ㉒** : si $F$ sev stable par $f$ alors : *p 164-5*

si $f$ diagonalisable, $f_{|F}$ aussi.

si $f$ trigonalisable, $f_{|F}$ aussi

**Ex ㉓** : • un projecteur $p$ est diagonalisable
• un endomorphisme nilpotent est trigonalisable avec 0 pour seule valeur propre.

**application ㉔** : soit $\mathbb{K}$ un corps fini à $q$ éléments, et $E$ $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors $f$ est diagonalisable SSI $f^q - f = 0$ *GOU p178*

## IV. Décomposition de Dunford et exponentielle de matrice

**Thm ㉕** (Décomposition de Dunford) soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$. il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que (i) $d$ diagonalisable, $n$ nilpotent (ii) $f = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$. De plus, $d$ et $n$ sont des polynômes en $f$ *GOU p193*

**application ㉖** . Calcul de l'exponentielle d'une matrice.

$$\exp\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

- si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A$ est diagonalisable SSI $e^A$ est diagonalisable *FGN p114*
- si $\chi_A$ est scindé, et $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de $A$, alors $e^A = e^D + e^D \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$ est celle de $e^A$.

**prop ㉗** : $\exp(A)$ est un polynôme en $\underset{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}{A}$. De plus, on a : $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}[A]^\times$ est un connexe non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *ZAV p48*

**Thm ㉘** :
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{C}) \\ A & \longmapsto & \exp(A) \end{array}$$
est surjective et de plus, $\forall A \in GL_n(\mathbb{C})$, $\exists P \in \mathbb{C}[X]$ tq $A = \exp(P(A))$

**coro ㉙** : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A^2, A \in GL_n(\mathbb{R})\}$

**Rq ㉚** : • $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle *NH2G2 p359*
• exp n'est pas injective sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

## V. Endomorphismes cycliques

MAN p19

**Def 31** : soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. Le sous espace cyclique de $f$ associé à $x$ est $E_x = \mathrm{vect}(f^k(x), k \in \mathbb{N})$

**Def-prop 32** : si $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(f)(x) = 0\}$ alors $I_x$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par un unique élément $\mu_x \in \mathbb{K}[X]$ unitaire que l'on appelle polynome minimal local en $x$.

p4

**Def 33** : $f \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique s'il existe $x \in E$ tq $E = E_x$.

p63

**Ex 34** : un endomorphisme de $E$ de dim $n$ admettant $n$ valeurs propres distinctes est cyclique.

**Thm 35** : (i) $\exists\, x \in E,\ \mu_x = \mu$

(ii) $f$ est cyclique $\iff \deg(\mu) = n$

$\iff \exists\ \mathcal{B}$ une base de $E$ dans laquelle

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

une telle matrice est appelée matrice de compagnon associée au polynôme $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ notée $C(P)$

et ici, $P = \mu_f$.

FGN p123 + MAN p67

**Thm 36** : (Réduction de Frobénius) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe une unique suite finie de polynômes unitaires $P_1 \dots P_r$ telle que :

(i) $\forall\, i \in [\![1, r-1]\!],\ P_{i+1} \mid P_i$

(ii) $\exists$ une base $\mathcal{B}$ de $E$ pour laquelle $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} C(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C(P_r) \end{pmatrix}$

MAN p133

## VI Endomorphismes normaux [Bonus]

On suppose ici que $E$ est un ev euclidien et $\forall f \in \mathcal{L}(E)$ on note $f^*$ l'adjoint de $f$.

ROD p78

**Def 37** : on dit que $f$ est normal si $f^* f = f f^*$.

**Lemme 38** : (i) il existe un sev $F$ de $E$ de dimension 1 ou 2 stable par $f$

(ii) si $f$ est normal, et si $F$ est un sev stable par $f$ alors $F$ et $F^\perp$ sont aussi stables par $f$ et $f^*$

**Thm 39** : si $f \in \mathcal{L}(E)$ est normal, alors $E$ est somme directe orthogonale d'une famille $(E_k)_{k=1}^{n}$ de sev tq $\dim(E_k) \in \{1, 2\}$ et

$f_{|E_k} = \lambda_k \mathrm{Id}$ si $\dim(E_k) = 1$

$f_{|E_k} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ si $\dim(E_k) = 2$

p79

**application 40** : Réduction des endomorphismes symétriques

Références: [FGN] : Francinou (Oraux X-ENS 2) (pour Thm 35 et ~~prop~~ appli 2C)
[GOU] : Gourdon (Algèbre)
[MAN] : Mansuy (Algèbre linéaire ...)
(NH2G2) : Caldero (Nouvelles histoires) ... (pour Rq 30)
[ZAV] : Zavidovique (un max de maths) (pour surjection exp [27] [28] [29])
[RDO] : Ramis Deschamps Odoux (partie VI Bonus)

95%