150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de Matrices.

CAL H_2G : p144 ([illegible])

Dans cette leçon, $\mathbb{K}$ désigne un corps et n, p des entiers non nuls

<u>Def 1:</u> une action d'un groupe G sur un ensemble X est une application $\cdot : \begin{array}{ccc}(G \times X) & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & g\cdot x\end{array}$ vérifiant

(i) $\forall x \in X \quad 1\cdot x = x$

(ii) $\forall x \in X,\ g, g' \in G, \quad g\cdot(g'\cdot x) = (gg')\cdot x$.

I. Action par translation.

<u>Def 2:</u> L'action par multiplication à gauche est l'action suivante:

$$\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (P\ ,\ M) & \longmapsto & PM \end{array}$$

<u>Def 3:</u> L'action par multiplication à droite est l'action suivante:

$$\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (P\ ,\ M) & \longmapsto & MP^{-1} \end{array}$$

A. Matrices élémentaires

<u>Def 4:</u> Une matrice élémentaire est une matrice de l'un des trois type suivants:

(i) matrice de dilatation: $\Delta_i(\lambda) = \begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$

(ii) matrice de transvection: $T_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c} i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & \lambda & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ où $\lambda \in \mathbb{K},\ i \neq j$.

(iii) matrice de permutation: $P_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$

<u>Rq 5:</u> On a les correspondances suivantes:

Matrices	$\Delta_i(\lambda)M$	$T_{ij}(\lambda)M$	$P_{ij}M$
Opérations	$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$

ce qui correspond aux opérations élémentaires sur les lignes. On obtient les mêmes correspondances sur les colonnes en multipliant à droite.

<u>Application 6:</u> Pivot de Gauss pour la résolution de système linéaire.

B. Matrices échelonnées réduites

<u>Def 7:</u> Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ $(n \geq 2)$ est dite échelonnée (en lignes) si:

(i) Chaque ligne est nulle ou bien son premier coefficient non nul vaut 1

(ii) si une ligne est nulle, les suivantes le sont

(iii) si la ligne i a son premier coefficient non nul en colonne j, alors le premier coefficient non nul de la ligne $i+1$ est sur une colonne $k > j$.

Une matrice échelonnée est dite réduite si de plus le premier coefficient non nul de chaque ligne est le seul coefficient non nul de la colonne.

<u>Thm 8:</u>
- Deux matrices M et M' de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dans la même orbite pour l'action par multiplication à gauche (respectivement à droite) SSI elles ont même noyau (resp même Image).
- Toute matrice est dans l'orbite d'une matrice échelonnée en lignes (resp en colonnes) réduites

II. Action de Steiniz.

Def 9 : On appelle action de Steiniz l'action suivante :

$$\begin{array}{ccc} (GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ ((P, Q), M) & \longmapsto & PMQ^{-1} \end{array}$$

• Deux matrices sont dites équivalentes si elles sont dans la même orbite pour l'action de Steiniz.

Thm 10 : Une matrice de rang r est équivalente à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Cor 11 : Deux matrices sont équivalentes SSI elles ont même rang.

Thm 12 : (Décomposition de Bruhat). On note T_s le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ formé des matrices triangulaires supérieurs inversibles, alors $\forall M \in GL_n(\mathbb{K})$, $\exists T_1, T_2 \in T_s$ et $P_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})_{1\leq i,j\leq n}$ où $\sigma \in S_n$ tels que :

$$M = T_1 P_\sigma T_2.$$

De plus, σ est unique.

prop 13 : On suppose que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Notons $\mathcal{O}_r$ l'orbite des matrices de rang r, alors :

$$\overline{\mathcal{O}_r} = \bigsqcup_{k=0}^{r} \mathcal{O}_k$$

corol 14 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'unique orbite fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\mathcal{O}_0$ et l'unique orbite ouverte est $\mathcal{O}_{\min(n,p)}$.
si $n = p$, on obtient également que $\overline{GL_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

III. Action par conjugaison

Def 15 : • $GL_n(\mathbb{K})$ agit par conjugaison sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par l'action

$$\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P, M) & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array}$$

• deux matrices dans la même orbite pour cette action sont dites semblables.

Rq 16 : deux matrices semblables ont même trace, même rang, même polynôme caractéristique / minimal.

A. Matrices diagonalisables et trigonalisable

Def 17 : On dit qu'une matrice est diagonalisable (resp trigonalisable) si elle admet une matrice diagonale (resp triangulaire supérieure) dans son orbite pour l'action par conjugaison.

prop 18 : • $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ son polynôme minimal est scindé à racines simples

• M est trigonalisable $\Leftrightarrow$ son polynôme minimal est scindé.

B. Réduction de Frobénius

Def 19 : soit $P \in \mathbb{K}[X]$: $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0$.
on appelle matrice compagnon de P la matrice :

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & 0 & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \\ 0 & & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Thm 20: soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. Il existe une suite de polynômes unitaires $P_1 \dots P_r \in \mathbb{K}[X]$ telle que A soit dans la même orbite que la matrice :

$$\begin{pmatrix} C(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C(P_r) \end{pmatrix}$$

La suite de polynômes est de plus unique et ce sont les invariants de similitudes de M.

C. Réduction des endomorphismes normaux.

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$-ev euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Def 21: Si $M \in M_n(\mathbb{R})$, on dit que M est normale si $M^tM = {}^tMM$.

Lemme 22: soit u un endomorphisme normal de E et F un sous-espace de E stable par u, alors F et $F^\perp$ sont stables par u et u^* (où u^* est l'adjoint de u)

DEV ①

Thm 23: soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice normale, alors $\exists P \in O(n)$ telle que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & r_1 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & r_s \end{pmatrix} {}^tP$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $r_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $b_j \neq 0$.

application 24: théorème spectral sur un espace euclidien.

IV. Action par congruence

Def 25: • On appelle action par conjugaison l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $S_n(\mathbb{K})$ suivante :
$$GL_n(\mathbb{K}) \times S_n(\mathbb{K}) \to S_n(\mathbb{K}), \quad (Q, S) \mapsto QS{}^tQ$$

• Deux matrices dans la même orbite pour cette action sont dites congruentes.

A. Réduction et signature :

Thm 26: • soit $S \in S_n(\mathbb{C})$ telque $rg(S) = r$, alors S est congruente à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

• soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, $\exists (r,s) \in \mathbb{N}^2$ telque S soit congruente à $\begin{pmatrix} I_r & & 0 \\ & -I_s & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$. Le couple (r,s) est unique et est appelé signature de S.

B. Décomposition polaire

Def 27: On appelle S_n^{++} l'orbite de I_n pour l'action par congruence ; on a alors $S_n^{++} = \{ S \in S_n(\mathbb{R}),\ S \text{ est définie positive} \}$.

Thm 28: On considère ici l'action : $O(n) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $(Q, M) \mapsto QM$

DEV ②

• l'application : $O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $(Q, S) \mapsto QS$ est un homéomorphisme.

• l'orbite de toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ contient une matrice symétrique positive (définie si $M \in GL_n(\mathbb{R})$)

Coro 29: Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $O(n)$ est le groupe $O(n)$ lui-même.

Développement ①: Réduction des endomorphismes normaux (RDO 2) Thm 23

Développement ②: Décomposition polaire (H2G2 Tome 1, Caldero Germoni p 366) Thm 28

Références:

- Blanloeil (Une introduction moderne à l'algèbre linéaire) pour partie I.
- Ramis, Deschamps, Odoux (RDO) Tome 1 et 2
- Gourdon (Algèbre)
- Caldero (H2G2 Tome 1)