104 Groupes finis : Exemples et application

Dans cette leçon, G désigne un groupe fini, on suppose connu les notions de sous-groupes, groupes distingués, quotients, action de groupes, groupes simples, dérivés, morphismes

I. Ordre d'un élément

Def ①: Soit $g \in G$, l'ordre de g est le plus petit entier $n>0$ (s'il existe) qui vérifie $g^n = 1$, on le note $ord(g)$

prop ②: si $g^n = 1$ alors $ord(g) \mid n$

Ex ③: • $\bar{1}$ est d'ordre n dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

• une racine p-ème de l'unité (p 1er) différente de 1 est d'ordre p dans $\mathbb{C}^*$.

• si $a,b \in G$ sont d'ordres p, q avec $p \wedge q = 1$ et $ab = ba$, alors $ord(ab) = pq$

Thm ④ (Lagrange) Si H est un sous-groupe de G, alors on a : $|G| = |G/H||H|$
en particulier, le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe et $\forall x \in G$, $ord(x) \mid |G|$

App ⑤: si $|G| = p$, où p 1er, les sous-groupes de G sont G et $\{1\}$, en particulier, G est cyclique et $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Thm ⑥ (Burnside) : Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 1)$ tel que les éléments de G sont tous d'ordre fini, alors G est fini.

II. Actions de groupe

Def ⑦: soit G qui opère sur X un ensemble, on appelle orbite de $x \in X$ l'ensemble $\omega(x) = \{g.x, g \in G\}$ et stabilisateur de $x \in X$: $Stab(x) = \{g \in G, g.x = x\}$

Ex ⑧: • G agit par translation sur lui-même, cette action possède une unique orbite

• G opère sur lui même par conjugaison et $\forall x \in G$ $Stab(x)$ est le centralisateur de x dans G.

prop ⑨: Si $|G| = n$, G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ (groupe symétrique)

prop ⑩: l'application $f : G/Stab(x) \to \omega(x)$, $g\,Stab(x) \mapsto g.x$ est une bijection.

coro ⑪: si $y \in \omega(x)$, alors $\exists g \in G$, $Stab(y) = g\,Stab(x)g^{-1}$ et on a : $|X| = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{|G|}{|Stab(\omega)|}$ où la somme est prise sur les orbites pour l'action de G sur X.

Ex ⑫: $|G| = |Z| + \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ |\omega| > 1}} \frac{|G|}{|Stab(\omega)|}$ où Z est le centre de G.

app ⑬: Le centre d'un p-groupe non-trivial est non trivial, et tout groupe de cardinal p^2 est cyclique

III. Théorèmes de Sylow

Def ⑭: Soit G un groupe fini de cardinal $n = p^\alpha m$ où p est 1er, $p \nmid m$. Un p-Sylow de G est un sous-groupe de G de cardinal p^α,

p18 **Ex 15** : soit $P = \{ A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F}_p),\ a_{ij} = 0 \text{ si } i>j,\ a_{ii} = 1 \}$ alors P est un p-sylow de $GL_n(\mathbb{F}_q)$.

p19 **Lemme 16** : Soit G tq $|G| = p^\alpha m$, $p \nmid m$ et p 1er, et soit H un sous-groupe de G. Soit S un p-sylow de G, alors il existe $a \in G$ tq $aSa^{-1} \cap H$ soit un p-Sylow de H.

Gou p27 [R] p19 **Thm 17** : soit G comme précédemment, alors G contient un p-Sylow.

app 18 : G contient des sous-groupes d'ordre p^i $\forall i \leq \alpha$.

Thm 19 : (i) si H sous-groupe de G qui est un p-groupe il existe un p-sylow S avec $H \subset S$

(ii) les p-sylows de G sont tous conjugués (le nombre n_p divise donc n)

(iii) On a $n_p \equiv 1 [p]$ (donc $n_p | m$).

cor 20 : Soit S un p-sylow de G, on a :

S distingué dans G $\Leftrightarrow$ $n_p = 1$ $\Leftrightarrow$ S est l'unique p-sylow de G

app 21 : Un groupe de cardinal 63 n'est pas simple.

IV. Groupe symétrique

Def 22 : soit $\sigma \in S_n$, $\langle \sigma \rangle$ agit sur $\{1, \dots, n\}$ par $\sigma . i = \sigma(i)$. On dit que σ est un l-cycle si cette action n'a qu'une seule orbite de cardinal supérieur à 2 et que le cardinal de cette orbite est l. [R] p44

• les 2-cycles sont appelés transpositions

Thm 23 : toute permutation $\sigma \in S_n$ se décompose en produit de ~~cycles~~ cycles à supports disjoints, cette décomposition est unique à l'ordre près. [R] p45

Cor 24 : les systèmes suivants engendrent S_n :

(i) les transpositions (ij) $i \neq j$.

(ii) les transpositions $(1k)$ où $2 \leq k \leq n$ p47

(iii) les transpositions $(k\,k{+}1)$ où $2 \leq k \leq n$

(iv) (12) et $(12 \dots n)$.

Def/prop 25 : il existe un unique morphisme non trivial $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ appelé morphisme signature. p49

Def 26 : On note $A_n = \ker(\varepsilon)$ le groupe alterné d'ordre n.

Thm 27 : Pour $n \geq 3$, A_n est engendré par les 3-cycles p52

Thm 28 : A_n est simple $\forall n \geq 5$

prop 29 : A_5 est le seul groupe simple d'ordre 60 à isomorphisme près DEV

V. Représentations sur les groupes finis. Serre

Ici, G est un groupe fini de cardinal g et V un $\mathbb{C}$-ev de dimension fini

Def 30 : . Une représentation (linéaire) de G sur V est un morphisme $\rho : G \to GL(V)$. Son degré est $n = \dim(V)$
son caractère est $\chi : \begin{array}{l} G \to \mathbb{C} \\ s \mapsto \mathrm{tr}(\rho(s)) \end{array}$
. elle est dite irréductible si les sev stables par tous les ρ_s sont V et $\{0\}$.

Ex 31 : $(e_t)_{t\in G}$ base de V, $\rho : \begin{array}{l} G \to GL(V) \\ s \mapsto (e_t \to e_{ts}) \end{array}$

Def 32 : deux représentations $\rho_i : G \to GL(V_i)$ sont isomorphes s'il existe $u : V \xrightarrow{\sim} V'$ tq $\forall s \in G$ $u \circ \rho(s) = \rho_2(s) \circ u$

Thm 33 : Toute représentation ρ s'écrit $\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} \rho_i$ où $\rho_i : G \to GL(W_i)$ irréductible ; $\bigoplus_{i=1}^{r} W_i = V$ et W_i stable par ρ

Thm 34 : Il y a autant de représentations irréductibles que de classes de conjugaisons dans G, de plus si $\rho_1 \dots \rho_r$ sont les représentations irréductibles de degré $n_1 \dots n_r$, on a : $\sum_{i=1}^{r} n_i^2 = |G|$ et $\forall s \neq 1$ $\sum_{i=1}^{r} n_i \chi_i(s) = 0$.

App 35 : table de S_4

Ex 35 : dans un groupe abélien fini G, toutes les représentations irréductibles sont de degré 1

Thm 36 (prolongement d'un caractère) : si $H \leq G$ g.a.f et χ un caractère de H, alors χ se prolonge en un caractère de G. [Pes]

Thm 37 (Structure des g.a.f) : soit G un g.a.f, $\exists ! r \in \mathbb{N}$, $\exists ! (n_1, \dots, n_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tq $n_1 | \dots | n_r$ et $G \simeq \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$. [Pes]

Table de S_4 [P]

	(id)	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_T	3	1	0	-1	-1
$\varepsilon\chi_T$	3	-1	0	1	-1
χ_S	2	0	-1	0	2

Références :

~~[COR] : Cortella (Théorie des groupes)~~

[P] : Perrin (Cours d'Algèbre)

[GOU] : Gourdon (Algèbre)

[R] : Rombaldi (Maths pour l'agreg)

[PEY] : Peyré (Algèbre discrète de la TF)

[SERRE] : Serre (Représentations)