Exemples de groupes distingués et de groupes quotients. Applications

103

G désigne un groupe

I. Sous-groupe distingué

COR p38

Def ①: un sous groupe H de G est distingué dans G si $\forall x \in G, \forall h \in H, xhx^{-1} \in H$ (on note $H \triangleleft G$)

Ex ②:
- si G est abélien, tout sous-groupe de G est distingué dans G
- tout sous-groupe du centre $Z(G)$ est distingué dans G
- soit $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes, alors $\ker \varphi \triangleleft G$: $SL_n(\mathbb{K})$ est distingué dans $GL_n(\mathbb{K})$

prop ③: Tout sous-groupe d'indice 2 est distingué

CPJ p 39

Ex ④:
- A_n est distingué dans S_n.) BOF
- le groupe des quaternions $\mathbb{H}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ avec $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. possède que des sous-groupes distingués mais n'est pas abélien.

p42

prop ⑤: si $H \triangleleft G$ et $H \subset K$ un sous-groupe de G alors $H \triangleleft K$.

en revanche, $H \triangleleft K$ et $K \triangleleft G \not\Rightarrow K \triangleleft G$:

$H = \{id, (12)(34)\}$ $K = V_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(32)\}$

et $G = S_4$

prop ⑥: soit $f : G \to G'$ un morphisme.

(i) si $H' \triangleleft G'$ alors $f^{-1}(H') \triangleleft G$

(ii) si $H \triangleleft G$ et f surjective, alors $f(H) \triangleleft G'$.

II. Groupe quotient

Thm ⑦: soit $H \triangleleft G$, et $\pi : G \to G/_H$, $x \mapsto x \bmod H$ la surjection canonique. Alors il existe une une loi de groupe sur $G/_H$ telle que π soit un morphisme. $G/_H$ est alors appelé groupe quotient de G par H p40

Ex ⑧:
- $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- $GL_n(K)/_{SL_n(K)}$ $n \geq 1$ K corps.

prop ⑨: Un sous-groupe de G est distingué SSI c'est le noyau d'un morphisme de groupes. p42

Ex ⑩: $A_n = \ker(\varepsilon)$ ou $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ est le morphisme signature

lemme ⑪: Soit G groupe et $H \triangleleft G$, alors la surjection canonique $\pi : G \to G/_H$ induit une bijection p42

$S : \{\text{ss-groupes de } G \text{ contenant } H\} \longrightarrow \{\text{ss-groupes de } G/_H\}$

$K \longmapsto \pi(K)$

Ex ⑪: Les sous-groupes de $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ sont les $d\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ pour $d \mid n$, ils sont de cardinal $\frac{n}{d}$, cycliques.

app ⑫: il y a un unique sous-groupe de cardinal $d \mid n$ dans $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, et $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ où φ est la fonction d'Euler CPJ p24 app 13 : Le groupe multiplicatif d'un corps est cyclique.

Thm 14 (factorisation) : soit $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes et $H \triangleleft G$ tel que $H \subset \ker \varphi$. On note $\pi : G \to G/_H$ la surjection canonique. Alors il existe un unique morphisme de groupes $\phi : G/_H \to G'$ tel que $\varphi = \phi \circ \pi$.

p 43

cor 15 : tout morphisme $\varphi : G \to G'$ induit un isomorphisme de groupes $G/_{\ker\varphi} \simeq \mathrm{Im}\,\varphi$.

Ex 16 : • $GL_n(\mathbb{K})/_{SL_n(\mathbb{K})} \simeq \mathbb{K}^*$

• $\mathbb{U} \simeq \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ où $\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \}$

p 44

• $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \simeq \mu_n$ où $\mu_n = \{ z \in \mathbb{C}, z^n = 1 \}$.

• $G/Z(G) \simeq \mathrm{Int}(G)$ $\quad \mathrm{Int}(G) = \{ f \in \mathrm{Aut}(G), \exists x \in G, f(g) = xgx^{-1} \ \forall g \in G \}$.

cor 17 : Soit $H \triangleleft G$ et $K \triangleleft G$ avec $H \subset K$ alors $H \triangleleft K$, $K/_H \triangleleft G/_H$ et $(G/_H)/_{(K/_H)} \simeq G/_K$

cor 18 : Soit $H \triangleleft G$ et K un sous-groupe de G, on note $KH = \{ kh, k \in K, h \in H \}$. Alors $K \cap H \triangleleft K$, KH est un sous-groupe de G tel que $H \triangleleft KH$ et : $KH/_H \simeq K/_{K\cap H}$.

III. Le sous-groupe dérivé

Def 19 : On appelle commutateur d'un groupe G un élément de la forme $xyx^{-1}y^{-1} =: (x,y)$ où $x, y \in G$. On appelle sous-groupe dérivé de G le sous-groupe engendré par les commutateur noté $D(G)$

p 46

Ex 20 : • G abélien $\iff D(G) = \{1\}$.

• Le groupe dérivé n'est pas en général l'ensemble des commutateurs : $D(SL_2(\mathbb{R})) = SL_2(\mathbb{R})$ mais $-I_2$ n'est pas un commutateur dans $SL_2(\mathbb{R})$.

[P] p 101

• $D(GL_n(\mathbb{K})) = SL_n(\mathbb{K})$ si $(n, \#\mathbb{K}) \neq (2, \mathbb{F}_2)$.

prop 21 : $D(G) \triangleleft G$ et $G/_{D(G)}$ est abélien, de plus, si $H \triangleleft G$, $G/_H$ est abélien $\iff D(G) \subset H$ (on note $G_{ab} = G/_{D(G)}$ l'abélianisé de G)

COR p 46

Def 22 : G est simple si G a exactement 2 sous-groupes distingués ($\{1\}$ et G).

[P] p 12

Ex 23 : • les groupes simples abéliens sont les $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$

• A_4 n'est pas simple.

Thm 24 : A_n simple $\forall n \geq 5$.

Cor 25 : si $n \neq 4$, les groupes distingués de S_n sont $\{id\}$, A_n et S_n.

cor 26 : $D(A_n) = A_n$ si $n \geq 5$, et $D(S_n) = A_n$ si $n \geq 2$

IV. Représentations linéaires et groupes distingués

Ici G est un groupe fini de card g et V un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie n.

Def (27): Un représentation (linéaire) de G sur V est un morphisme $\rho : G \to GL(V)$, son degré est $n = \dim(V)$, son caractère associé est $\chi : G \to \mathbb{C}$, $s \mapsto tr(\rho_s)$.

Def (28): un représentation $\rho : G \to GL(V)$ est dite irréductible si $V \neq \{0\}$ et si les seuls sev stables par ρ (ie par tous les ρ_s) sont V et $\{0\}$.

Ex (29): • soit $(e_t)_{t\in G}$ une base de V (de dimension g) alors $\rho : G \to GL(V)$, $s \mapsto (e_t \mapsto e_{st})$ est une représentation dite régulière de G.

• tout représentation de degré 1 est irréductible.

Thm (30): tout représentation est somme directe de représentation irréductibles : $\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} \rho_i$ ($\rho_i : G \to GL(W_i)$ avec $\bigoplus_{i=1}^{r} W_i = V$ W_i stable par ρ).

Def (31): soient $\rho : G \to GL(V)$ et $\rho' : G \to GL(V')$ 2 représentations, elles sont isomorphes s'il existe un iso $u : V \xrightarrow{\sim} V'$ tq $\forall s \in G$ $u \circ \rho(s) = \rho'(s) o u$.

Def (32): On munit $F(G,\mathbb{C})$ du produit scalaire
$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{g} \sum_{t\in G} \varphi(t)\overline{\psi(t)}$$

Thm (33): soient $\rho_i : G \to GL(V_i)$ des représentations irréductibles de caractère χ_i $(i \in \{1,2\})$

(i) si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, $(\chi_1, \chi_2) = 0$

(ii) si $\begin{cases} V_1 = V_2 = V \\ \rho_1 = \rho^2 = \rho \end{cases}$ alors $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ et $(\chi, \chi) = 1$.

Les caractères irréductibles forment un système orthogonal, il y a donc au plus $\dim(F(G,\mathbb{C}))$ - représentations irréductibles à isom près.

prop (34): soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de caractère χ, soit $g \in G$ d'ordre k, alors :

(i) $\rho(g)$ est diagonalisable

(ii) $\chi(g)$ est la somme de $\dim(V) = d$ racine $k^{\text{ème}}$ de l'unité

(iii) $|\chi(g)| \leq \chi(1) = d$

(iv) $K_\chi := \{x \in G, \chi(x) = \chi(1)\}$ est un sous-groupe distingué de G.

Thm (35): on note $\rho_1 \cdots \rho_r$ les représentations irréductibles de G ; les sous-groupes distingués de G sont du type $\bigcap_{i\in I} K_{\chi_i}$ où $I \subset \{1..r\}$ et χ_i est le caractère de ρ_i

cor (36): G est simple SSI $\forall i \neq 1, \forall g \in G, \chi_i(g) \neq \chi_i(1)$

Ex (37): Table de $\mathfrak{S}_4$:

	id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_S	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	-1	0	1	-1
$\chi_{W'}$	2	0	-1	0	2

on obtient A_4 V_4 S_4 et $\{id\}$ comme groupes distingués

Références:

Cortella, Théorie des groupes
Perrin, Cours d'algèbre
Serre, (rpz linéaire des groupes finis)
Peyré (Algèbre discrète de la TF)