101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemple et applications

I. Définitions

FGRR p13

Def ①: Soit G un groupe, X un ensemble. On dit que G opère sur X si l'on s'est donné une application

$$\begin{array}{l} G \times X \longrightarrow X \\ (g,x) \longmapsto g.x \end{array} \quad \text{vérifiant :}$$

1) $\forall g, g' \in G, \forall x \in X \quad g.(g'.x) = (gg').x$

2) $\forall x \in X, \quad 1.x = x$

p15 **prop ②:** G opère sur X si et seulement si il existe un homomorphisme $\varphi : G \to \sigma(X)$: on pose $\varphi(g) : x \mapsto g.x$.

Def ③: (i) G opère transitivement sur X si $\forall x \in X$, $\forall y \in X$, $\exists g \in G$ tel que $g.x = y$.

p14 (ii) G opère fidèlement si $\varphi : g \in G \longmapsto (x \mapsto g.x)$ est injectif.

p14 **Def ④:** si G opère sur X et si $x \in X$, on définit

$Stab(x) = \{g \in G, g.x = x\}$ le stabilisateur de x et

$\omega(x) = \{g.x, g \in G\}$ l'orbite de x.

p14-15 **Ex ⑤:** - σ_n opère sur $[\![1 \dots n]\!]$ par $\sigma . i = \sigma(i)$

- Le groupe G opère par translation sur lui-même :

$$\begin{array}{l} G \times G \longrightarrow G \\ (g,x) \longmapsto gx \end{array}$$ et cette action est transitive et fidèle

- G opère sur lui même par conjugaison : $\begin{array}{l} G \times G \longrightarrow G \\ (g,x) \longmapsto gxg^{-1} \end{array}$

- si E ev dim finie $\begin{array}{l} GL(E) \times \mathcal{B}(E) \longrightarrow \mathcal{B} \\ (g, (e_1, \dots, e_n)) \longmapsto (g(e_1) \dots g(e_n)) \end{array}$ est une action transitive et fidèle

et si $x \in G$, $Stab(x) = \{g \in G, gx = xg\}$ qui est le centralisateur de x dans G.

p15 **Thm ⑥:** si $|G| = n$ alors G est isomorphe à un sous groupe de σ_n.

II. Equation aux classes

p15

prop ⑦: Soit G qui opère sur X et $x \in X$, alors

$$\begin{array}{l} G/_{Stab(x)} \longrightarrow \omega(x) \\ \bar{g} \longmapsto g.x \end{array}$$ est une bijection

coro ⑧: Soit G un groupe fini agissant sur X ensemble fini, alors $|X| = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{|G|}{|Stab(\omega)|}$

où Ω est l'ensemble des orbite de Ω

prop ⑨: (i) la relation "être dans une même orbite" est une relation d'équivalence.

(ii) $Stab(x)$ est un sous groupe de G $\forall x \in X$

(iii) si x et y sont dans la même orbite, leur stabilisateurs sont conjugués.

Ex ⑩: On considère G un groupe fini qui agit sur lui même par conjugaison, alors si Z est le centre de G, on a :

$$|G| = |Z| + \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ |\omega| > 1}} \frac{|G|}{|Stab(\omega)|}$$

p16

application ⑪: Le centre d'un p-groupe non trivial est non trivial.

application ⑫: Tout groupe de cardinal p^2 est abélien.

III. Théorèmes de Sylow.

Def ⑬: Soit G un groupe fini de cardinal $n = p^\alpha m$ où

p est premier et $p \nmid m$. Un p-Sylow de G est un sous-groupe de G de cardinal p^α.

Remarque 14 : P est un p-Sylow de G si et seulement si P est p-groupe et $[G:P] \wedge p = 1$.

Ex 15 : $P = \{ A \in M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),\ a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \text{ et } a_{ii} = 1 \}$ est un p-sylow de $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. p18

Lemme 16 : soit G un groupe avec $|G| = p^\alpha m$ $p \nmid m$ et H un sous-groupe de G. Soit S un p-sylow de G. Alors il existe $a \in G$ tel que $aSa^{-1} \cap H$ soit un p-Sylow de H. p19

Thm 17 : soit G un groupe fini et p 1er divisant $|G|$, alors G contient au moins un p-sylow. p18

Cor 18 : si $|G| = p^\alpha m$, G contient des sous-groupe de cardinal p^i $\forall i \leq \alpha$. Gou p28 p19

Thm 19 : Soit G un groupe de cardinal $|G| = p^\alpha m$ où $p \nmid m$
(i) soit $H \subset G$ un p-groupe alors il existe un p-Sylow S avec $H \subset S$ p19
(ii) Les p-Sylow sont tous conjugués (donc leur nombre $n_p \mid n$)
(iii) on a $n_p \equiv 1 [p]$ (donc $n_p \mid m$)

Cor 20 : soit S p-Sylow de G, $S \triangleleft G \Leftrightarrow n_p = 1$.

application 21 : Un groupe de cardinal 63 n'est pas simple p20

IV. Groupe symétrique

prop 22 : Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\langle \sigma \rangle$ le groupe engendré par σ, qui opère sur $X = \{1, \dots, n\}$ par p14

$$\langle \sigma \rangle \times X \longrightarrow X$$
$$(g, i) \longmapsto g(i)$$

on note $F_1 \dots F_r$ les orbites de X sous $\langle \sigma \rangle$. Alors les permutations σ_i définie par :

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \notin F_i \\ \sigma(x) \text{ si } x \in F_i \end{cases}$$

sont des cycles d'ordre $|F_i|$ et $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_r$. (décomposition en cycle à support disjoint) [Perr] p15 [Com] p80

prop 23 : soit $(i_1 \dots i_k)$ un k-cycle et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors $\sigma (i_1 \dots i_k) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k))$

Thm 24 : Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Les conjugués de σ sont exactement les $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tels que si $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_r$, $\tau = \tau_1 \dots \tau_m$ sont les décompositions en cycles à supports disjoints, il existe une bijection de $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\} \longrightarrow \{\tau_1, \dots, \tau_r\}$ qui conserve la longueur des cycles.

Thm 25 : Pour $n \geq 5$, A_n est simple. p28

prop 26 : A_5 est le seul groupe simple d'ordre 60. p30

V. Action de Steinitz

Caldero p 5 **Def 27** : soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps. l'action de Steinitz est l'opération

$$\alpha : (GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$
$$((P, Q), A) \longmapsto PAQ^{-1}.$$

deux matrices dans la même orbite pour cette action sont dites équivalentes.

p 4 **Thm 28** : si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est une matrice de rang r, alors A est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $I_r \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $J_r \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

p 4 **Cor 29** : Deux matrices sont dans la même orbite pour l'action de Steinitz SSI elles ont même rang.

p 11 **prop 30** : soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour tout entier r tel que $r \leq \min(m,n)$, on note $\mathcal{O}_r$ l'orbite des matrice de rang r. Alors : $\overline{\mathcal{O}_r} = \bigcup_{0 \leq k \leq r} \mathcal{O}_k$

cor 31 :
- L'unique orbite fermée est $\mathcal{O}_0 = \{0\}$
- L'unique orbite ouverte est $\mathcal{O}_{\min(m,n)}$.
- si $m = n$, on retrouve le résultat de densité $\overline{GL_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

[GOU] : Gourdon. (Algèbre)
[PERR] : Perrin (cours d'Algèbre) (85%)
[CAL] : Caldero Germoni (NH_2G_2) (partie V)