FRANCQUEVILLE Martin

219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

(1)

E espace vectoriel ~~normé~~ sur $\mathbb{R}$ de dimension n

1) Premières définitions :

déf 1 minimum local : $A \subset E$, $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$
f admet en a un minimum local $\Leftrightarrow \exists V$ un voisinage de a dans E tel que $\forall x \in V \cap A$, $f(x) \geq f(a)$

déf 2 un minimum local est global si :
$\forall x \in A$, $f(a) \leq f(x)$

Remarque 3 : on adapte les définitions pour un maximum local, global. Un extremum est soit un maximum, soit un minimum.

2) Extrémums et compacité

K un compact de E

thm 4 : Si $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, alors f est bornée et atteint ses bornes.

application 5 : Sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dim finie, toutes les normes sont équivalentes.

application 6 : $f \in \mathcal{C}(K, K)$ telle que $\forall x, y \in K$
$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$, alors f admet un unique point fixe.

application 7 : Si $f \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$, $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$
alors f admet un minimum global.

3) Extrémums et différentiabilité

$\mathcal{U}$ sera un ouvert de E

a) Théorème fondamental

thm 8 : Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ admet un extremum relatif en $a \in \mathcal{U}$, et si f est différentiable en a, alors $df(a) = 0$

Rem 9 : la réciproque est fausse : $f : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{matrix}$. Un point $a \in \mathcal{U}$ tel que $df(a) = 0$ est dit point critique.

application 10 : Théorème de Rolle : $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,
$f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ dérivable sur $]a, b[$ telle que
$f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a, b[$, $f'(c) = 0$.

application 11 : généralisation du théorème de Rolle :
B une boule fermée de E et $f : E \to \mathbb{R}$ différentiable et constante sur $\partial B = B \setminus \mathring{B}$, alors $\exists x_0 \in \mathring{B}$, $df(x_0) = 0$.

b) Conditions d'ordre 2

prop 12 : Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, ~~F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel~~, ~~f deux fois différentiable~~ $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ $a \in \mathcal{U}$; alors :
$$f(a + h) = f(a) + df(a)(h) + \frac{1}{2} d^2 f(a)(h, h) + o(\|h\|^2)$$

Rem 13 : $d^2 f(a)(h, h)$ est la forme quadratique dont la matrice dans la base canonique est $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i, j \leq n}$

déf 14 : Cette matrice est appelée matrice Hessienne de f en a. On la notera $H(f)(a)$

prop 15 : Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in \mathcal{U}$ un point critique de f. On a alors :

* Si a est un minimum (resp. maximum) ~~de f~~ local de f, alors $H(f)(a)$ est positive (resp. négative)
* Si $H(f)(a)$ est définie positive (resp. négative), alors a est un minimum local (resp. maximum local) de f.

Rem 16 : * Si $H(f)(a)$ est seulement positive (ou négative), a n'a pas nécessairement de minimum (ou maximum) local en a :
$f : (x, y) \to x^2 - y^3$

* $H(f)(a)$ définie positive (resp. négative) n'est pas une condition nécessaire : ~~$g : x^2 + y^4 \to$~~ $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^4$

Th 17 : (cas particulier $n = 2$) : $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, $a \in \mathcal{U}$ tel que $df(a) = 0$. On note $H(f)(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$. On a alors :

* $rt - s^2 > 0$ alors f admet un extremum ~~en a~~ local en a
* $rt - s^2 < 0$: alors f n'admet pas d'extremum en a (a est dit point selle)
* $rt - s^2$: on ne peut pas conclure directement.

ex 18 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ admet ~~un~~ deux minimums locaux aux points $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

c) Extrémas liés

déf 19 : Soit $M \subset E$. M est dite sous-variété de E de dimension d et de classe $\mathcal{C}^k$ (pour $k \geq 1$) si pour tout $m \in M$, il existe Ω voisinage ouvert de m ~~tel~~ et $f_1, \dots, f_{n-d} : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ tel que :
i) $M \cap \Omega = \{x \in \Omega \mid \forall i \in [\![1, n-d]\!], f_i(x) = 0\}$
ii) $\{df_1(m), \dots, df_{n-d}(m)\}$ soit une famille libre

déf 20 : On appelle espace tangent à une sous-variété M au point $m \in M$ l'ensemble : $\left\{ v \in E \;\middle|\; \exists \delta, \gamma :]-\delta, \delta[\to M \text{ tel que } \gamma(0) = m \text{ et } \gamma'(0) = v \right\}$ et on le note $T_m M$

prop 21 : $T_m M = \bigcap_{i=1}^{n-d} \mathrm{Ker}(df_i(m))$

Lemme 22 : Soient $a, l_1, \dots, l_k$ ($k \geq 1$) des formes linéaires sur E telles que $l_1, \dots, l_k$ soient indépendantes et $\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(l_i) \subset \mathrm{Ker}(a)$.
Alors $a \in \mathrm{vect}(l_1, \dots, l_k)$

Th 23 (extrémas liés) : En reprenant les notations de la déf 19, si $f_{|M}$ présente un extremum en m alors $df(m) = \sum_{i=1}^{n-d} \lambda_i \, df_i(m)$

Application 24 : Si u est un endomorphisme symétrique de E, ~~alors~~ muni d'un produit scalaire, alors u est diagonalisable.

4) Extrémums et convexité

$\mathcal{C}$ un convexe de E

3

Prop 25 : Si f admet un minimum local en $a \in \mathcal{C}$, alors ce minimum est global. De plus, si f est strictement convexe, il est unique.

Application 26 : Résolution d'un système linéaire par la méthode du gradient à pas optimal : Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on veut résoudre $Ax = b$. En notant $\bar{x}$ la solution, $\varphi : x \longmapsto \frac{1}{2}\|x\|_A^2 - {}^t x b$ (où $\|.\|_A$ est la norme associée à A), λ_{max} et λ_{min} les valeurs propres la plus grande et la plus petite de A, ~~on a~~ ~~on a~~ et $\nabla\varphi(x)$ le gradient de φ en x :

1) φ atteint son minimum en $\bar{x}$

2) Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq \bar{x}$ et, on définit $\begin{cases} x_0 = a \\ \alpha_k = \dfrac{\|\nabla\varphi(x_k)\|^2}{\|\nabla\varphi(x_k)\|_A^2} \text{ si } x_k \neq \bar{x},\ \alpha_k = 0 \text{ sinon} \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla\varphi(x_k) \end{cases}$ (cf numérique)

alors $x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \bar{x}$, et $\forall k \geq 0$,

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} \left(\frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}\right)^{k+1} \|x_0 - \bar{x}\|.$$

DVLPL

5) Cas des fonctions holomorphes : Ω ouvert de $\mathbb{C}$

Déf ~~Prop~~ 27 : $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$; f possède la propriété de la moyenne si $\forall a \in \Omega$, $\forall r > 0$ tel que $D(a, r) \subset \Omega$, on a :
$$f(a) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} f(a + re^{it})\,dt$$

Prop 28 : Si $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ possède la propriété de la moyenne, alors si $|f|$ admet un maximum local en $a \in \Omega$, f est constante égale à $f(a)$ (principe du maximum)

Prop 29 : Si f est holomorphe sur Ω, elle possède la propriété de la moyenne

Application 30 : Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ où Ω connexe borné de $\mathbb{C}$ alors $|f|$ atteint son maximum sur la frontière $\bar{\Omega} - \Omega$.

Application 31 : (Lemme de Schwarz) : Soit $f \in \mathcal{O}(D(0,1))$ telle que $f(0) = 0$ et $f(D(0,1)) \subset D(0,1)$. Alors on a :

i) $\forall z \in D(0,1)$, $|f(z)| \leq |z|$

ii) $|f'(0)| \leq 1$

Si de plus $|f'(0)| = 1$ ou $\exists z \in D(0,1) \setminus \{0\}$ tel que $|f(z)| = |z|$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ tel que $f : z \mapsto \lambda z$.

Application 32 : Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, si $|f|$ atteint son minimum dans Ω alors ce minimum est nul ou f est constante.

Réf : * Madère, Préparation à l'oral de l'agrég, analyse

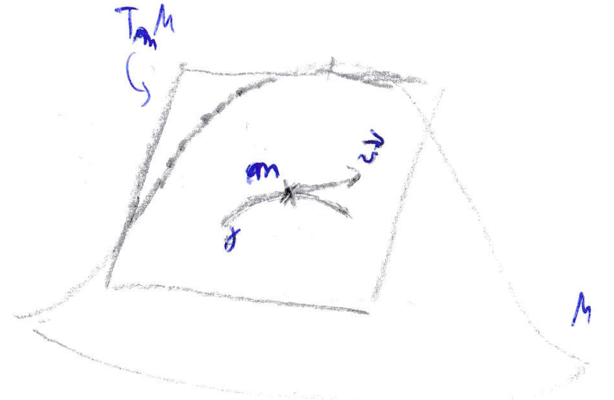
* Beck, Malick, Peyré : Objectif agrégation

* Tauvel : Analyse complexe pour la L3

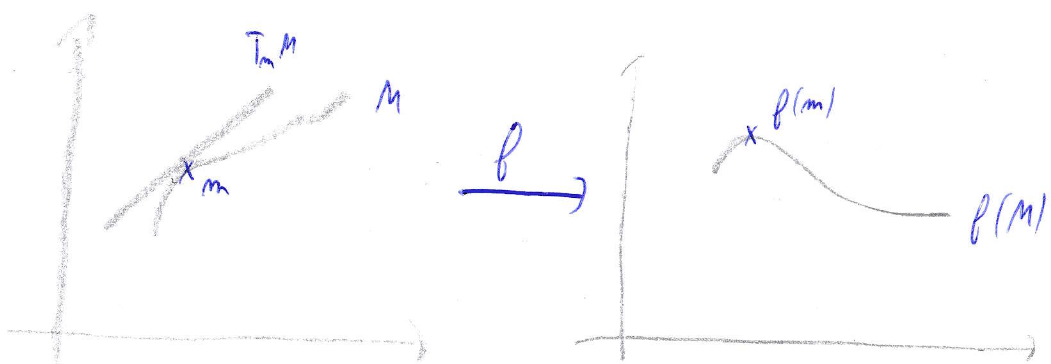
* Avez : Calcul différentiel (DVLP 1)

* Bernis : Analyse pour l'agrég de math (DVLPL)

annexe 1:



annexe 2:



annexe 3: