FRANCQUEVILLE Martin

201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications

1

I Espaces de fonctions continues sur un compact

(K désigne un espace métrique compact, et on note $\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1) Cas général

prop 1 : $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace complet

thm 2 : (Heine) Si F est un espace métrique et $f : K \to F$ continue, alors f est uniformément continue.

ex 3 : $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,1]$

déf 4 : Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$, on dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue en un point $x \in K$ si pour $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_x > 0$ tel que :

$$\forall y \in K,\ d(x,y) \leq \delta_x \Rightarrow \forall f \in \mathcal{F},\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

On dit que $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue si $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point de K et qu'on peut choisir δ_x ne dépendant pas de x.

thm 3 : (Heine cas équicontinu) : Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$ équicontinue. Alors $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue sur K.

th 4 (Ascoli) : Soit $\mathcal{F} \subset (\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$. Alors on a équivalence entre ces deux assertions : i) $\mathcal{F}$ est équicontinue et bornée

ii) $\mathcal{F}$ est relativement compacte.

app 5 : $\{ f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C}) \mid |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha$ et $\|f\|$ pour $M \in \mathbb{R}_+^*$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$ est compact dans $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$

2) Cas où $K \subset \mathbb{R}$

thm 6 : (Rolle) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que f soit continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

thm 7 : (égalité des accroissements finis) : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

app 8 : Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $K \in \mathbb{R}_+^*$, et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, alors :

f est K-lipschitzienne $\Leftrightarrow \forall t \in I,\ |f'(t)| \leq K$.

thm 9 (Weierstrass) Soit $f \in \mathcal{C}(K)$, alors il existe une suite de polynômes (P_n) tel que (P_n) converge uniformément sur K vers f.

prop 10 : On note $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 1-périodique définie sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ par $\Delta(x) = |x|$. Alors

$x \mapsto \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{1}{2^t} \Delta(2^t x)$ est continue mais dérivable nulle part.

app 11 : Les fonctions continues nulle part dérivables de $\mathcal{C}(K)$ sont denses dans $\mathcal{C}(K)$.

II Espaces L^p ($p \in [1, +\infty]$)

1) Inégalités classiques, espaces $\mathcal{L}^p$

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ sera un espace mesuré dans tout le II.

notation 12 : $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu) = \{ f$ mesurable de X dans $\mathbb{C}$ telle que $\int_X |f|^p d\mu < +\infty\}$
et on note $\|.\|_p$: $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$$f \longmapsto \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

lemme 13 : Soient $\alpha, \beta \geq 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$ et $u, v \in [0, +\infty]$
alors $u^\alpha v^\beta \leq \alpha u + \beta v$

déf 14 : $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sont dit conjugués.
On dira aussi que 1 et $+\infty$ sont conjugués.

thm 15 : (inégalité de Hölder) : Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ conjugués et f, g des fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$
alors on a : $\int_X fg \, d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}$

th 16 : (inégalité de Minkowski) : Soit $p \in]1, +\infty[$, f, g mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$, alors : $\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}$

th 17 : Soit $p \in [1, +\infty[$, $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $\|.\|_p$ est une semi-norme.

déf 18 : On définit $\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 \mid \mu(\{x \mid |f(x)| \geq M\}) = 0\}$ et
$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{F}, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{C}$ mesurable telle que $\|f\|_\infty < +\infty\}$

th 19 : $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\|.\|_\infty$ est une semi-norme.

2) Espace L^p

déf 20 : On définit $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ comme le quotient de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ par la relation d'équivalence $f = g$ μ-p.p.

th 21 : Soit $p \in [1, +\infty[$ et $(f_n) \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_p < +\infty$; alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge presque partout, sa somme $F \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ est définie presque partout, et $\left\|\sum_{n=1}^{N} f_n - F\right\|_p \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

th 22 : (Riesz-Fischer) : $p \in [1, +\infty[$: $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ est complet. De plus, pour toute suite de Cauchy (f_n) de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$, alors il existe une sous-suite qui converge presque partout.

prop 23 : $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ est complet

th 24 : (admis) On note $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Alors pour tout $1 \leq p < +\infty$, $(\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \|.\|_p)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue

app 25 : (Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, alors on a : $\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ixt} dt \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} 0$

app 26 : L'espace de Schwartz est dense dans $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$

3) Le Hilbert L^2

prop 27 $\langle , \rangle : L^2 \times L^2 \to \mathbb{C}$, $(f,g) \mapsto \int_X f \bar{g}\, d\mu$ est un produit scalaire sur L^2.

th 28: $(L^2(X,\mathcal{F},\mu), \langle , \rangle)$ est un Hilbert.

app 29: Pour une famille libre (f_i) de L^2, il existe (g_i) une famille libre orthonormée telle que $\forall N \geq 0$, $\text{vect}(f_1,\dots,f_N) = \text{vect}(g_1,\dots,g_N)$ et $\langle f_N, g_N \rangle > 0$.

DVLP1

th 30: (Grothendieck): On suppose $\mu(X) = 1$. Soit $p \in [1,+\infty[$ et $V \subset L^p(X,\mathcal{F},\mu)$ tel que V soit fermé pour $\|\cdot\|_p$ et $V \subset L^\infty(X,\mathcal{F},\mu)$. Alors, V est de dimension finie.

Rem 31: Ce résultat est vrai pour tout X de mesure finie non nécessairement égale à 1.

III Espace de fonctions holomorphes

Ω un domaine de $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{H}(\Omega)$ les fonctions holomorphes sur Ω.

1) Théorème de d'Alembert.

thm 32: Soit $f \in \mathcal{H}(D(0,R))$ pour $R>0$, alors on a : $\frac{1}{n!}|f^{(n)}(0)| \leq \frac{\sup\{|f(z)| \mid |z| = r\}}{r^n}$ où $r \in]0,R[$.

déf 33: Une fonction f de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ est dite entière.

cor 34: Toute fonction entière et bornée est constante.

app 35: (D'Alembert): Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, P admet au moins une racine complexe si P est non constante.

2) L'espace métrique $\mathcal{H}(\Omega)$

thm 36: Soit $(f_n) \in \mathcal{H}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ tel que (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers f. Alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $(f_n^{(j)})$ converge uniformément sur tout compact. (Weierstrass)

déf 37: $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de compacts de Ω. On la dit exhaustive si : $\forall n \geq 1$, $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ et $\bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n = \Omega$

ex 38 $K_n = \{z \in \Omega \mid d(z, \complement\Omega) \geq \frac{1}{n} \text{ et } |z| \leq n\}$ pour $n \geq 1$ définit une suite exhaustive de compacts.

prop 39: Pour $f,g \in \mathcal{H}(\Omega)$, on définit $d(f,g) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, \|f-g\|_{\infty,K_n})$ pour une suite exhaustive de compacts K_n. d est alors une distance sur $\mathcal{H}(\Omega)$ et le munit de la même topologie que la convergence uniforme sur tout compacts.

thm 40 (Montel) Soit $A \subset \mathcal{H}(\Omega)$. Alors, on a équivalence entre
i) $\forall K$ compact de Ω, $\exists M_K > 0$ tq $\forall f \in A$, $\|f\|_{\infty,K} \leq M_K$
ii) A est relativement compact.

DVLP 2

app 41: Il n'existe pas de norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{H}(\Omega)$ telle que $(\mathcal{H}(\Omega), \|\cdot\|)$ et $(\mathcal{H}(\Omega), d)$ aient la même topologie.