NOM : BOULY

Prénom : FLORENT

Rouge entourez l'épreuve Bleu

entourez le Jury A B C D E F

Sujet choisi : 162 - Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires ;

Autre sujet : aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

1

1) Généralités : $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

def 1 : On appelle système d'équations linéaires un système du type :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}.$$

Les $a_{ij}$ et les $b_i$ sont des éléments de $\mathbb{K}$, donnés. Les $x_i$ sont dites "inconnues" et résoudre le système signifie déterminer les $x_i \in \mathbb{K}$ - s'il y en a - qui vérifient toutes les équations.

interprétation matricielle : La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le n}} \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ est dite matrice du système. Si on note $\phi_A$ le morphisme de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathbb{K}^p$ canoniquement associé à $A$, et $X$ la colonne des inconnues, on résout $\phi_A(X) = B$ avec $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$. Le système possède des solutions si $B \in \operatorname{Im} \Phi_A$.

Si on note $U_1, \dots, U_n$ les vecteurs colonnes de $A$, le système peut s'écrire : $x_1 U_1 + \dots + x_n U_n = B$. On cherche donc à exprimer $B$ comme combinaison linéaire de $U_1, \dots, U_n$.

L'ensemble des solutions du système est un sous espace affine de $\mathbb{K}^n$, de dimension $n-r$ où $r = \operatorname{rg} \Phi_A$.

interprétation par les formes linéaires : Chaque ligne peut être interprétée comme définissant une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$. Le système s'écrit alors $\begin{cases} L_1(X) = b_1 \\ \dots \\ L_p(X) = b_p \end{cases}$.

Le rang de la famille $(L_i)_{1\le i\le p}$ est $r$. On peut alors extraire une famille libre de cardinal $r$ qui quitte à renuméroter les équations sera la famille $(L_i)_{1\le i\le r}$. Pour tout $k \in \{r+1, \dots, p\}$ la forme $L_k$ est combinaison linéaire des $(L_i)_{1\le i\le r}$ soit $L_k = \sum_{i=1}^{r} \mu_{ik} L_i$. Pour qu'il y ait des solutions il est nécessaire que les relations $b_k = \sum_{i=1}^{r} \mu_{ik} b_i$ soient vérifiées.

2) Le Pivot de Gauss : i) Opérations élémentaires :

def 2 (matrices élémentaires) :

- matrices de transvection : Si $i$ et $j$ sont distincts dans $[\![1;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on note $M_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$.
- matrices de dilatation : Si $i \in [\![1;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on note $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii} = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, \underset{i\text{ème place}}{\lambda}, 1, \dots, 1)$.
- matrices de permutation : Si $\sigma \in S_n$, on note $P_\sigma$ la matrice de passage de la base $(e_i)_{1\le i\le n}$ de $\mathbb{K}^n$ à la base $(e_{\sigma(i)})_{1\le i\le n}$.

def/prop 3 (opérations sur les lignes) :

- opération du type $\mathcal{L}_1$ : si $i$ et $j$ sont deux indices différents et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on ajoute à la $i$-ème ligne de $A$ la $j$-ième ligne multipliée par $\lambda$. Si $A$ est considérée comme matrice de vecteurs lignes $(L_i)_{1\le i\le p}$, on symbolise cette opération par $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$. Cette opération revient à remplacer $A$ par $M_{ij}(\lambda)A$.
- opération du type $\mathcal{L}_2$ : On multiplie une ligne de $A$ par un scalaire $\alpha$ non nul. On symbolise par $L_i \leftarrow \alpha L_i$ ce qui correspond à remplacer $A$ par $D_i(\alpha)A$.
- opération du type $\mathcal{L}_3$ : On permute deux lignes de $A$ : si $i \ne j$, on écrira $L_i \leftrightarrow L_j$. Cette opération revient à remplacer

NOM : Prénom :

Rouge entourez l'épreuve Bleu entourez le Jury A B C D E F

Sujet choisi :

Autre sujet :

2

$A$ par $P_{(ij)}A$.

def/prop 4 (opérations sur les colonnes) : On définit de la même manière les opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice $A$ :

$C_1$ : $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ où $A$ est remplacé par $AM_{ji}(\lambda)$.

$C_2$ : $C_i \leftarrow \alpha C_i$ où $A$ est remplacé par $AD_i(\alpha)$.

$C_3$ : $C_i \leftrightarrow C_j$ où $A$ est remplacé par $AP_{(ij)}$.

prop 5 : Toutes ces opérations élémentaires transforment $A$ en une matrice équivalente.

ii) lemme du Pivot de Gauss : [ANNEXE]

thm 6 : Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i \le p, 1 \le j \le m} \in M_{p,n}(\mathbb{K})$. Si $a_{11} \neq 0$ il existe une suite de manipulations élémentaires de type $L_1$ sur les lignes de $A$ qui transforme $A$ en une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \\ 0 & \times \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$

Si $a_{1,1} = 0$ mais la première colonne n'est pas nulle, on arrive au même résultat après permutation de deux lignes de $A$.

corollaire 7 : Si $A$ est de rang $r > 0$, il existe une suite de manipulations $L_1$ et $L_3$ et de type $C_3$ transformant $A$ en une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \begin{matrix} \alpha_{11} & & \times \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \alpha_{rr} \end{matrix} & \times \\ 0 \cdots 0 & 0_{p-r,m-r} \end{pmatrix}$ où $\alpha_{i,i} \neq 0$ pour $1 \le i \le r$.

Cette propriété caractérise les $\underbrace{\text{rang que}}_{\text{matrices de même}}$ $A$.

iii) Résolution d'un système linéaire d'équations :

On cherche à résoudre $AX = B$ où $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$.

Soit $A' = (A \;\; B) \in M_{p,n+1}(\mathbb{K})$. Si on met en œuvre sur $A$ les manipulations du corollaire 7, on obtient une matrice $A'' = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} \gamma_{11} & & \gamma_{1,r+1} & \cdots & \gamma_{1,n} & b'_1 \\ & \gamma_{r,r} & \gamma_{r,r+1} & \cdots & \gamma_{r,n} & b'_r \\ \hline & 0 & & 0 & & b'_{r+1} \\ & & & & & b'_p \end{array}\right)$

qui décrit un système équivalent.

La discussion est alors élémentaire : on a des solutions que si $b'_{r+1} = \cdots = b'_p = 0$. Si ces conditions sont remplies, les valeurs de $x_1, \ldots, x_r$ s'obtiennent en résolvant un système triangulaire.

La complexité algorithmique de cette méthode est $O(m^3)$ où $m = \min(p,n)$.

iv) Remarques "numériques" : [ANNEXE]

On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on suppose aussi que $r = p = n$. Si $a_{11} \neq 0$ on débute l'algorithme par : $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$ pour $2 \le i \le n$.

Une erreur $\varepsilon$ sur $L_1$ sera multipliée par $\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ ce qui peut être mauvais si $\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ est très grand.

On propose deux stratégies pour éviter ce problème :

- pivot partiel : A chaque étape on commence par effectuer une permutation de ligne pour amener le plus grand coefficient en module sur la ligne que l'on travaille.
- pivot total : Cette fois-ci on permute lignes et colonnes pour récupérer le plus grand coefficient en module à chaque étape.

applications : calcul du déterminant, calcul de l'inverse d'une matrice.

thm 8 : $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices de transvections. $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices de transvections et dilatations

NOM :

Prénom :

Rouge entourez l'épreuve Bleu

entourez le Jury A B C D E F

Sujet choisi :

Autre sujet :

3

### 3) Système de Cramer :

**def 9** : On reprend les notations de la def 1. Un système de Cramer est un système où $n = p$ et où la matrice $A$ des coefficients est inversible. Un tel système a une unique solution.

**résolution par les formules de Cramer** : On cherche à résoudre le système de Cramer $AX = B$ où $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. On note $\Delta = \det A$ et $\Delta_j$ le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la $j$-ième colonne de $A$ par $B$. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est la solution du système et en notant $C_k$ la $k$-ième colonne de $A$ on a les formules de Cramer : $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$.

### 4) Factorisation matricielle

**i) Factorisation LU** : Soit $M \in GL_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre les proposition :

a) Les mineurs principaux de $M$ sont tous non nuls.

b) $M$ peut se factoriser sous la forme $M = LU$ où $L$ est triangulaire inférieure à diagonale formée de $1$ et $U$ est triangulaire supérieure. Une telle décomposition est alors unique.

**remarque** : Si $M$ est inversible mais si la condition a) n'est pas respectée on peut s'y ramener par permutation préalable des lignes et des colonnes. On a donc une décomposition $M = PLU$ où $P$ est une matrice de permutation.

**ii) Factorisation QR** : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice $Q \in U_n(\mathbb{C})$ et $R$ triangulaire supérieure telles que $A = QR$. La résolution du système $AX = B$ est alors équivalente à la résolution de $RX = {}^t\overline{Q}B$. On a donc un seul système triangulaire contre deux pour la factorisation LU.

**iii) Factorisation de Choleski** : Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Il existe une unique matrice $T$ triangulaire supérieure réelle dont les coefficients sont strictement positifs, telle que : $M = {}^tT\,T$.

**remarque** : Le fait que $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ n'est pas restrictif : un système de Cramer de $n$ équations à $n$ inconnues peut s'écrire, en travaillant avec les vecteurs colonnes : $x_1 C_1 + \dots + x_n C_n = B$ et s'interpréter comme la recherche des coordonnées de $B$ dans la base des $(C_i)_{1 \le i \le n}$. Si on munit $\mathbb{R}^n$ d'une structure euclidienne ce système entraîne : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\langle C_i, x_1 C_1 + \dots + x_n C_n \rangle = \langle C_i, B \rangle$ ce qui peut se réécrire $(\langle C_i, C_j \rangle) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle C_1, B \rangle \\ \vdots \\ \langle C_n, B \rangle \end{pmatrix}$.

### 5) Applications :

**[DEV 1]** : Dimension du commutant : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $C(A) = \{X \in M_n(\mathbb{K}) \mid AX = XA\}$, $\mu_A$ le polynôme minimal de $A$ et $\chi_A$ le polynôme caractéristique de $A$. On a équivalence entre les propriétés :

i) $C(A) = \mathbb{K}[A]$

ii) $\chi_A = \mu_A$.

**[DEV 2]** : Translatées et dimension finie :

**lemme 10** : Soient $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et linéairement indépendantes dans $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $M = (f_i(x_j))_{1 \le i, j \le n}$ est inversible.

**thm 11** : Pour $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on définit pour $\tau \in \mathbb{R}$ la fonction translatée $f_\tau(x) := f(x + \tau)$.

On suppose $f$ dérivable, on a équivalence entre les propriétés :

i) $F = \mathrm{Vect}(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est de dimension finie.

ii) $f$ est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

méthode du pivot de Gauss :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le m}} \in M_{p,m}(\mathbb{K})$ avec $A \neq 0$ et $rg\, A = r > 0$.

Si $a_{1,1} \neq 0$, on effectue les manipulations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_i$ pour $2 \le i \le p$. $a_{1,1}$ est appelé pivot.

Si $a_{1,1} = 0$, on s'y ramène par permutation d'une ligne et/ou d'une colonne (car $A \neq 0$).

A est alors de la forme $A' = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & x & — & x \\ 0 & & & \\ | & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ avec $\lambda_{1,1} \neq 0$.

$A_1$ est alors de rang $A' - 1$ et il on réitère les manipulations sur $A_1$ jusqu'à transformer A en une matrice

$$A'' = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_{11} & x & \\ 0 & \lambda_{r,r} & ? \\ \hline 0 \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

exemple de résolution :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 4x + 11y = 37 \end{cases} \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2' = L_2 - L_1 \\ L_3' = L_3 - 2L_1 \\ L_4' = L_4 - 4L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ y + 2z = 5 \\ 3y + 12z = 21 \end{cases} \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2' \\ L_3' - L_2' \\ L_4' - 3L_2' \end{matrix} \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ 2z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

choix du pivot :

$\varepsilon = 10^{-3}$ la précision de la machine : $1 + 10^{-4} = 1$.

$\begin{cases} 10^{-4} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ a pour solutions $x_1 = 1,00010$ et $x_2 = 0,9990$ qui sont indistinguables de 1.

Si on choisit le pivot $a_{11} = 10^{-4}$ on obtient le système équivalent :

$\begin{cases} 10^{-4} x_1 + x_2 = 1 \\ (1 - 10^4) x_2 = 2 - 10^4 \end{cases}$ La machine donne alors $x_2 = 1$ puis $x_1 = 0$. Le problème n'apparaît pas si on prend $1 = a_{2,1}$ comme pivot.

références : Cours MP-MP* Jean Voedts
Joseph Grifone : Algèbre linéaire

Autre sujet :

Sujet choisi :

Rouge entourez l'épreuve Bleu entourez le Jury A B C D E F

NOM : Prénom :