NOM : BOLLY

Prénom : FLORENT

Rouge entourez l'épreuve Bleu

entourez le Jury A B C D E F

Sujet choisi : Exemples de sous groupes distingués et de groupes quotients.

Autre sujet : Applications.

1

1) Ensemble quotient :

def 1 : Soit R une relation d'équivalence sur E. Si $x \in E$, on appelle classe d'équivalence de x par R le sous ensemble de E noté $\bar{x}$ défini par : $\bar{x} = \{y \in E \mid x R y\}$.

propriété 2 : Les classes d'équivalence de E forment une partition de E. Réciproquement, il existe une relation d'équivalence sur E dont les classes sont exactement les éléments d'une partition donnée.

def 3 : On appelle ensemble quotient de E par R l'ensemble, noté E/R, des classes d'équivalence pour la relation R.

2) Groupes distingués :

def 4 : Soient $H < G$ deux groupes. On appelle classes à gauche les classes d'équivalence de G pour la relation $x R y \Leftrightarrow y^{-1} x \in H$. De même, on définit les classes à droite avec $x R' y \Leftrightarrow x y^{-1} \in H$. Les classes à gauche sont notées G/H.

def 5 : Le cardinal de G/H appelé indice de H dans G est noté $[G:H]$.

Th 6 (Lagrange) : Si G est fini on a $|G| = |H| \times [G:H]$.

def 7 : $H < G$ deux groupes. On dit que H est distingué dans G si on a : $\forall a \in G, \forall h \in G, a h a^{-1} \in H$. De manière équivalente, H est distingué dans G si les classes à gauche et à droite par H coïncident. On note alors $H \lhd G$.

propriété 8 : Tout sous groupe d'un groupe abélien est distingué dans ce groupe.

ex 9 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$.

propriété 10 : Le centre d'un groupe est toujours distingué dans ce groupe.

ex 11 : ~~$SL_n(\mathbb{C})$~~ $\mathbb{C}^* \times I_n \lhd GL_n(\mathbb{C})$.

Théorème 12 : $H \lhd G$. On peut munir G/H d'une structure de groupe avec $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy}$. Cette écriture ne dépend pas du représentant.

ex 13 : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ peut être muni d'une addition : $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$.

propriété 14 : Soit $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes, H et H' deux sous groupes de G, G'. Alors :

- $\varphi(H)$ est distingué dans G' si H est distingué dans G et φ surjectif
- $\varphi^{-1}(H')$ est distingué dans G si H' est distingué dans G'.

corollaire 15 : $\ker \varphi$ est distingué dans G.

exemple 16 : $A_n \lhd S_n$ car $A_n = \ker \varepsilon$.

th 17 (isomorphisme) : Soient G et G' deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupe. Alors f induit un morphisme de $G/\ker f$ vers $f(G)$.

exemple 18 : $S_n/A_n \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

propriété 19 : Soient N un sous groupe distingué de G et H sous groupe de G alors HN est un sous groupe de G et $N \lhd HN$.

th 20 (isomorphisme 2) : $N \lhd G$ et $H < G$. Alors $H \cap N \lhd H$ et on a l'isomorphisme $H/(H \cap N) \simeq HN/N$.

propriété 21 : Soit H un sous groupe de G d'indice 2 dans G. Alors H est distingué dans G.

ex 22 : $|A_n| = \frac{n!}{2}$ et $|S_n| = n!$ donc $A_n \lhd S_n$.

def 23 : Soit G un groupe. On dit que G est simple si ses seuls groupes distingués sont $\{1\}$ et G.

(2)

refs :

1) Gourdon Algèbre
2) Perrin
3) Grifone Algèbre linéaire
4) Serge Lang, Algèbre.

exemple 24 : $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est simple si et seulement si p est premier.

déf 25 : G un groupe. On dit que G est un p-groupe si $|G| = p^{\alpha}$ avec p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

propriété 26 : Le centre d'un p groupe n'est jamais trivial.

corollaire 27 : Soit G un p groupe, $|G| = p^{\alpha}$ avec $\alpha > 1$. Alors G n'est pas simple.

exemple 28 : $\mathbb{H}_8 = \{\pm 1 ; \pm i ; \pm j ; \pm k\}$ le groupe des quaternions avec : $i^2 = j^2 = k^2$; $ij = -ji = k$; $jk = -kj = i$; $ki = -ik = j$) n'est pas simple.

DEV 1

lemme 29 : Pour $n \geq 3$, A_n est engendré par les 3 cycles.

lemme 30 : Pour $n \geq 5$, les 3 cycles sont conjugués dans A_n.

théorème 31 : Pour $n \geq 5$, A_n est simple.

remarque 32 : $\triangleleft$ n'est pas transitive.

3) Groupe dérivé :

déf 33 : Le groupe dérivé $D(G)$ est le sous groupe engendré par les commutateurs de G c'est à dire les élément de la forme $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ avec $x, y \in G$.

propriété 34 : $D(G) \triangleleft G$ et $G/D(G)$ est abélien.

propriété 35 : $H \triangleleft G$. On a G/H abélien $\Leftrightarrow D(G) \subset H$.

ex 36 : • Pour $n \geq 5$, on a $D(A_n) = D(S_n) = A_n$.
• Si G est commutatif, $D(G) = \{e\}$
• $D(GL_n(\mathbb{C})) = SL_n(\mathbb{C})$ pour $n \geq 2$.

4) Théorèmes de Sylow :

th 37 : G un groupe avec $|G| = p^{\alpha} m$ où $p \nmid m$.
On appelle p-Sylow de G un sous groupe de G de cardinal p^{α}.
• Si H est un sous groupe de G qui est un p-groupe, il existe un p-Sylow qui contient H.
• Les p-Sylow sont conjugués (leur nombre k divise $|G|$)
• On a $k \equiv 1\ [p]$ (donc k divise m).

corollaire 38 : Si S est un p-Sylow de G on a :
$S \triangleleft G \Leftrightarrow S$ est l'unique p-Sylow de $G \Leftrightarrow k = 1$.

exc 39 : Un groupe d'ordre $63 = 3^2 \times 7$ n'est pas simple car un tel groupe n'a qu'un seul 7 Sylow.

5) Produits directs :

prop 40 : N et H deux groupes. On peut munir $G = N \times H$ d'une structure de groupe avec $(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 n_2, h_1 h_2)$.

th 41 (Chinois) : Si p et q sont des entiers premiers entre eux on a un isomorphisme $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

contre exemple 42 : $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \not\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

prop 43 : G_1 et G_2 deux sous groupes de G. Alors $G_1 \times G_2$ et G sont isomorphes si et seulement si :

1) $\forall g_1 \in G_1, \forall g_2 \in G_2, \; g_1 g_2 = g_2 g_1$.
2) $G = H_1 H_2$.
3) $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.

prop 44 : $H \lhd G$ et $K \lhd G$ tels que $H \cap K = \{1\}$ et $HK = G$, alors $G \simeq H \times K$.

6) Produits semi direct :

prop 45 : Soient N et H deux groupes et $\varphi : H \to \mathrm{Aut}\,N$ un morphisme. L'ensemble $N \times H$ muni de l'opération $(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 \varphi(h_1)(n_2), h_1 h_2)$ est un groupe.
~~notation~~ On note $N \rtimes_\varphi H := (N \times H, \cdot)$.

prop 46 : Soient N et H deux sous groupes de G tels que : 1) $N \lhd G$
2) $NH = G$
3) $N \cap H = \{1\}$.
Alors on a l'isomorphisme $N \rtimes_\varphi H \simeq G$ avec $\forall h \in H$, $\varphi(h) : n \mapsto h n h^{-1}$.

7) Suites exactes :

def 47 : Une suite exacte (courte) notée :
$1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$ est le condensé des informations suivantes :
1) N, G, H sont des groupes. 2) i et p sont des morphismes.
3) $\mathrm{Im}\, i = \ker p$. 4) $i : N \to G$ et $p : G \to H$.
On appelle section un morphisme $s : H \to G$ tel que $p \circ s = id_H$, on dit alors que p est sectionnable.

exemples 48 : • $1 \to A_n \to S_n \xrightarrow{\varepsilon} \{-1, 1\} \to 1$
• $1 \to SL_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^* \to 1$

propriété 49 : $G \simeq N \rtimes_\varphi H$ si et seulement si il existe une suite exacte $1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$ avec p sectionnable.

proposition 50 : $G \simeq N \rtimes_\varphi H$. Les propriétés suivantes sont équivalentes : i) φ est trivial.
ii) $\bar{H} = \{(1, h), h \in H\} \lhd G$.
iii) la loi du groupe sur G est celle du produit direct.

exemple 51 : $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ n'est pas de la forme $N \rtimes H$ car il est abélien.

application 52 : À isomorphisme près il existe 5 groupes d'ordre 8 : $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $D_4 \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{H}_8$. DEV2

8) Espace vectoriel quotient :

def 53 : E un espace vectoriel et F un sous espace vectoriel de E. On définit l'espace quotient E/F avec la relation $x R y \Leftrightarrow x - y \in F$. E/F peut être muni d'une structure d'espace vectoriel avec :
$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$ et $\lambda \bar{x} = \overline{\lambda x}$.

prop 54 : Si $\dim E < +\infty$, on a : $\dim E/F = \dim E - \dim F$.

prop 55 : Si $(E, \|.\|_E)$ est normé et F fermé dans E,
$\|\bar{x}\|_{E/F} = \inf_{y \in F} \|x - y\|_E$ définit une norme sur E/F.

prop 56 : $\pi : E \to E/F$, $x \mapsto \bar{x}$ est linéaire continue avec $|||\pi||| \leq 1$.

application 57 : $\forall \ell \geq 0$, $u \in \mathcal{L}(E)$ induit une injection $\ker u^{\ell+1}/\ker u^\ell \hookrightarrow \ker u^\ell/\ker u^{\ell-1}$

application 58 : Une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé.