Leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps commutatif et E un espace vectoriel.F et G sous-espaces vectoriels.

1. Espaces et sous-espaces vectoriels. — 0

1. *Rappels : définitions et propriétés.* —

- Def **(item 1)** : $E(+,\cdot)$, groupe abélien muni d'une opération externe "compatible". Les éléments de E sont communément appelés "vecteurs". Notion de combinaisons linéaires (CL).
- Rqe : le caractère abélien de + résulte en fait des compatibilités exigées (on développe $(1+1)(x+y)$ de deux façons).
- Exe : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$.
- Exe : Si Ł est un corps, Ł est un Z(Ł)-espace vectoriel.
- Def **(item 2)** : $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel s'il est un espace vectoriel par les lois induites. Il suffit de vérifier que F est non vide et stable par combinaison linéaire.
- Pro **(item 3)** : l'intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- Cor et Def : on peut parler de sous-espace engendré par une partie $P \in \mathscr{P}(E)$. On note Vect(P) et on dit que P est une *partie (ou famille) génératrice.*
- Def : On dit que E (ou F) est de "dimension finie" s'il existe une famille génératrice de cardinal fini. On se limitera à ce cas dans cette leçon.
- Exe : $\mathbb{K}^n$ a une famille génératrice canonique : $e_i = (\delta_{i1}, \cdots, \delta_{in})$ qui possède n vecteurs. $\mathbb{R}[X]$ ne peut être engendrée par un nombre fini de vecteurs. $\mathbb{F}_{p^n}$ est engendré par lui-même en entier et est donc de dimension finie.

2. *Dimension finie : familles libres, liées, génératrices et bases.* —

- **(item 4)**
  - Def : Famille libre d'un espace vectoriel non nul. Famille liée.
  - Pro : équivalence entre CL non triviale et existence d'un vecteur CL des autres.
  - Def : Base : famille génératrice et libre.
  - *Propriétés simples* :
    - Pro : Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice (y compris en dimension infinie).
    - Pro : Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
    - Pro : Toute sur-famille d'une famille liée est liée. Cor : si une famille contient 0 elle est liée.
    - Pro : Les éléments d'un (sous)espace vectoriel s'écrivent d'une unique manière sous forme de CL d'une base donnée.
- **(item 5)**
  - Pro : propriété clef. Étant données une famille libre L et une famille génératrice G, il est possible de compléter L avec des éléments de G de manière à obtenir une base de E.
  - *Propriétés qui en découlent* :
    - Pro : On peut extraire une base à partir d'une famille génératrice.
    - Pro : (*Théorème de la Base Incomplète*) On peut compléter une famille libre pour en faire une base.
    - Def et Pro : Toutes les bases ont même cardinal. On parle de *Dimension d'un (sous)espace vectoriel.*
    - Cor : En dimension n, toute famille libre a au plus n éléments et toute famille génératrice a au moins n éléments.
  - Exe :
    - Exe : $dim(\mathbb{C}^n) = n$. Si $M = \mathbb{K}[X]_n$ désigne les polynômes sur $\mathbb{K}$ de degré n ou moins, $dim(M) = n+1$. Enfin, pour l'espace de matrices n fois n, $dim(M(n,\mathbb{C})) = n^2$. Ces espaces possèdent des bases canoniques.
    - Rem : si P est de degré n, la famille $(f^{(k)})$ est aussi une base de $\mathbb{K}[X]_n$.
    - Exe : Pour $a, b \in \mathbb{R}^*$, $\{(u_n)_n \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.
- Pro **(item 6)** : existence d'un polynôme annulateur.
- Pro **(item 7)** : sous-espaces.
  - Cor : Tout sous-espace d'un espace de dimension finie est de dimension finie.
  - Pro : si un sous-espace en contient un autre de même dimension alors ils sont égaux.
  - Nota : ceci est faux pour les modules libres sur un anneau intègre.
  - Cor : En dimension n, toute famille libre a au plus n éléments et toute famille génératrice a au moins n éléments.
  - Pro : existence d'un sous-espace supplémentaire.
- Corps finis **(item 8)** :
  - The : théorème des bases télescopiques.
  - App : Extensions des corps. Degré d'une extension.
  - Pro : toute extension finie est algébrique.
  - Pro : les corps finis ont pour cardinal p^n où p est premier.
  - The : Développement : *Théorème de Wedderburn* -
  - The : Développement : *Algorithme de Berlekamp*
- **(item 9)** : Somme de deux sous-espaces.
  - $F + G =$Vect$(F \cup G)$.
  - Formule de Grassman : $dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$.
  - Def et Pro : Somme directe de deux sous-espaces. De plusieurs sous-espaces. $dim(F \oplus G) = dim(F) + dim(G)$. $dim(F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots F_n) = \Sigma_1^n dim(F_i)$.
  - Exe : $\mathscr{L}(E,F)$ est la somme directe des applications linéaires symétriques et anti-symétriques.

3. *Pivot de Gauss.* —

- **(item 10)** :
  - Pro : l'ensemble des solutions d'un système linéaire ne change pas si :
  - On change l'ordre des équations
  - On multiplie les termes d'une équation par un scalaire non nul
  - On rajoute à une équation une combinaison linéaire des autres
- Pro **(item 11)** :
  - De même les sous-espaces engendrés par deux familles sont les mêmes si l'on passe de l'une à l'autre par un enchaînement fini d'opérations suivantes :
  - Changer l'ordre des vecteurs
  - Multiplier un vecteur par un scalaire non nul
  - Rajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres
- **(item 12)** : Algorithme du pivot
  - Système échelonné
  - Inconnues principales et variables libres
  - Complexité des calculs : le système échelonné comporte $S_2(n) - S_1(n)$ multiplications et autant de sommes.La remontée triangulaire $S_1(n)$ multiplications et autant de sommes.
- Pro **(item 13) -**
  - Avec cet algorithme du pivot on peut :
  - Extraire un base d'une famille génératrice.
  - Compléter une famille libre en une base.
  - Trouver un base de $F + G$ à partir de générateurs de F et G.
  - Déterminer une base de $F \cap G$
  - Résoudre un système de n équations à p inconnues.

4. *Applications linéaires.* —

- Def **(item 14)** : Application linéaire entre $\mathbb{K}$-e.v.. Structure d'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$. Dimension $dim(E) * dim(F)$.
- **(item 15)** Cas particulier des endomorphismes $\mathscr{L}(E).f^{-1}$ est linéaire si f est un isomorphisme.
- Def et Pro : Le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels de E et F. On appelle "Rang" la dimension de l'image.
- The **(item 16)** : *Théorème du Rang.* Si $f \in L(E, F)$, $dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$
- Pro : L'image d'une famille libre (resp. génératrice) par un endomorphisme injectif (resp. surjectif) reste une famille libre (resp. génératrice).
- Exemple / application **(item 17)** : trouver une base de $Im(f)$
- Cor **(item 18)** :
  - Si $dim(E) \in \mathbb{N}$ et $\forall f \in L(E)$, nous avons alors l'équivalence entre :
  - f est bijective
  - f est surjective
  - f est injective
  - l'image d'une base est une base
  - l'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F
  - l'image d'une famille libre est une famille libre
- Pro **(item 19)** : deux espaces de même dimension n sont isomorphes et isomorphes à $\mathbb{K}^n$.
- Développement **(item 20)** : *Transport de structure par bijection.* $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

5. *Algèbre des matrices.* —

- Def et Pro **(item 21)** : tableau à $n \times p$ éléments. Espace vectoriel (et $\mathbb{K}$-algèbre) isomorphe à $\mathscr{L}(E, F)$. Caractère canonique (ou pas) tributaire du caractère canonique (ou pas) des bases de E et de F.
- Pro **(item 22)** : *Invariance par extension des scalaires* - Soit Ł une extension de corps de $\mathbb{K}$, et M une matrice n, m à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors le rang de A est le même par rapport à M ou à Ł.
- Def : Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice, d'un endomorphisme.
- Prop : $Rang(M) = Rang(M^t)$
- Alg : le Pivot de Gauss permet de calculer le rang d'une matrice, trouver une représentation paramétrique de l'espace des solutions d'un système de m équations linéaires à n inconnues.
- Pro et Def : polynômes d'endomorphismes (matrices carrées) grâce à la commutativité des monômes. Polynômes annulateurs.
- The : *Théorème de Cayley-Hamilton* - le polynôme caractéristique annule la matrice.
- Def : Polynôme minimal.
- Def : trace et déterminant d'un polynôme.
- The : Développement : *Théorème de Burnside*

6. *Dualité.* — *Formes linéaires et Dualité* :

- Def : l'espace dual de E, noté E^*, est l'espace des applications linéaires de E vers $\mathbb{K}$, applications appelées "formes linéaires".
- Pro : Pour $f \in E - 0$, le noyau est un hyperplan et l'image est de dimension 1. Ainsi, une équation linéaire est associée à l'appartenance à un hyperplan ou encore à la donnée du noyau d'une forme linéaire.
- Pro : En dimension finie $dim(E^*) = dim(E)$.
- Cor : E et E^* sont isomorphes. Il existe une base de E^* canoniquement associée à chaque base de E.
- Def : *espace bidual.* On définit et on note E^{**} le dual de E^*, ie le dual du dual de E.
- Pro : L'application qui à $x \in E$ associe l'application de E^* vers $\mathbb{K}$ définie par $\omega \to \omega(x)$ est linéaire et injective. En dimension finie elle est bijective et donc E et E^{**} sont *canoniquement isomorphes.*
- Def : *annulateur d'un sous-espace* F. Noté F^0, c'est l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur F.
- Pro : $dim(E) = dim(F) + dim(F^0)$

7. *Matrices (endomorphismes) et topologie : —*

- The : Théorème de Riesz - Soit E un espace vectoriel normé. Les fermés bornés de E sont compacts ssi E est de dimension finie.
- The : Soit E un evn de dim finie et F un evn. Alors toute application $f \in L(E, F)$ est continue.
- Pro : Les s-ev de dimension finie d'un evn sont fermés.
- Pro : $GL(n, \mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}(n, \mathbb{R})$

Développement 1 : ***Berlekamp***

Développement 3 : ***théorème de Burnside***
Développement 4 : ***Transport de structures*** $\mathbb{R}$ comme espace vectoriel de dimension 2.

.

Sources :

- *Mansuy - Mneimné : "Réduction des endomorphismes"*
- *J. Grifone "Algèbre Linéaire"*
- *X. Gourdon "Les Maths en tête : Algèbre"*
- *D. Perrin "Algèbre Générale"*
- *Dany-Jack Mercier "Corps Finis"*

October 9, 2018

Bruno Nitrosso, EPP et CNED