Leçon 170- Formes quadratiques sur un ev de dimension finie. Orthogonalité et isotropie. Applications.

## I. *Généralités [1]*

### 1. *Définitions*

— Déf : Forme bilinéaire
— Déf : Forme symétrique
— Déf : Matrice d'une forme bilinéaire
— Déf : Forme quadratique
— Déf : Forme polaire
— Prop : $Q(E) \cong S_n(\mathbb{R}), q \mapsto^t XAX$

### 2. *Orthogonalité, noyau et rang*

— Déf : $x \perp_\varphi y \Leftrightarrow \varphi(x,y) = 0$
— Prop : $X \subset (X^T)^T$
— Déf : Vecteur isotrope relativement à $\varphi$
— Déf : Cône isotrope
— Prop : $Ker(\varphi) = E^\perp \subset C_\varphi$
— Déf : Forme non dégénérée
— Déf : Forme définie/ définie positive
— Déf : Rang d'une forme quadratique

## II. *Réduction*

### 1. *Réduction de Gauss [1]*

— Thm de réduction de Gauss
— Prop : réduction et forme matricielle
— Déf : Bases q-orthogonale
— Corollaire : ${}^tPAP = D$

### 2. *Signature [2]*

— Déf : Signatur e
— Prop : Signature forme quadratique définie potive + interprétation matricielle
— Prop : Noyau = Cone isotrope
— Thm : Signature + thm de Sylvester

## III. *Classification [3]*

### 1. *Définitions*

— $q \sim q' \Leftrightarrow \exists u \in GL(E), q(u(x)) = q'(x)$ + matriciellement
— Déf : Discriminant

### 2. *Classification*

— Si k est algébriquement clos : Il n'y a q'une seule classe
— Si $k = \mathbb{R}$ : Il y a $(n+1)$ classe + invariant =singature et rang
— **Dev 1 : Lemme de Morse**
— Si $k = \mathbb{F}_p$ : Il y a deux classes
— **Dev 2 : Classification des formes quadratiques sur** $\mathbb{F}_p$

*Bibliographie :*

— 1- Rombaldi : Algèbre et géométrie
— 2- Grifone : Algèbre linéaire
— 3- Perrin : Cours d'algèbre