Leçon 156- Exponentielle de matrices. Applications.

I. *L'exponentielle matricielle*

1. *Prop.[1]*

— Déf : $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$
— Prop : $\exp : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ est continue
— Prop : $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$
— Prop : A nilpotente d'indice $q \geq 1, \exp(A) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{A^k}{k!}$ et $e^0 = I_n$
— Prop : $A \in M_n(\mathbb{K}), e^A \in \mathbb{K}[A]$ et commute avec A
— Si $A = diag(\lambda_i), e^A = diag(e^{\lambda_i})$
— Prop : Si A et B commutent alors $e^{A+B} = e^A e^B$
— Prop : A diago de valeurs propres λ_i alors e^A est diago de valeurs propres e^{λ_i}
— **Dev 1 : Différentielle de l'exp**
— Prop : $det(e^A) = e^{Tr(A)} \neq 0 \Rightarrow e^A$ inversible :$\exp(M_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$
— Déf : Logarithme matriciel

2. *Utilisation de la décomposition de Dunford [1]*

— Déf : Dunford
— Prop : exp transforme Dunford en Dundorf multiplicatif
— Prop : A diago $\Leftrightarrow e^A$ diago

3. *Surjectivité et injectivité [2]*

— Prop : $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ surjective
— Prop : $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to Gl_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective (il suffit de prendre une matrice de déterminant <0)
— $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to Gl_n(\mathbb{C})$ n'est pas injective
— Contre exemple dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$
— Sur $S_n(\mathbb{R}), \exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est injective
— **Dev 2 : exp est un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$**
— Corollaire : $GL_n(\mathbb{R}) \cong O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$

II. *Applications : Les équations différentielles [3]*

1. *Solutions*

2. *Stablité des solutions*

Bibliographie :

— 1- Rombaldi : Algèbre et Géométrie
— 2-Caldero-Germoni : Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométrie Tome 1
— 3- Demailly : Analyse numérique et équations différentielles