Leçon 155-Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

I. Réduction d'endomorphisme [2]

1. Polynôme caractéristique

- Déf : Polynôme caractéristique
- Prop : $\chi_A = \chi A^T$
- Prop : λ valeur propre de u $\Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0$
- Déf : Sous espace propre
- Prop : Si k est algébriquement clos alors tout endomorphisme à au moins une valeur propre
- Déf : Endomorphisme nilpotent + son polynôme caractéristique
- Prop : Trace = somme des valeurs propres et dét = produit des valeurs propres
- Déf : Vecteur propre [1]

2. Endormorphismes diagonalisables

- Prop : u diago si il existe une base de vecteur propre
- Prop : u diago $\Rightarrow$ sa matrice est semblable à une martrice diagonale
- Prop : u diago $\Leftrightarrow \chi_u$ scindé et $dim(E_\lambda = m_\lambda \Leftrightarrow E = \oplus E_\lambda$
- Exemple : Projceteurs, symétrie, transpositions
- Prop :Sur un corps fini, u diago $\Leftrightarrow u^q = u$

II. Applications de la diagonalisation

1. Thm principaux

- Thm spectral
- **Dev 1 : Décomposition de Dunford**
- Thm de réduction simultanée

2. Topologie matricielle

- Déf : $\mathscr{D}_n(k)$
- u diago ssi sa classe de conjugaison est fermée
- Prop : $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ [4]
- Application : Cayley Hamilton [4]
- Déf : $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$
- **Dev 2 : Homéomorphisme entre $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$**

Bibliographie :

- 1- Grifone : Algèbre linéaire
- 2- Gourdon : Algèbre
- 3- Objectif agrégation
- 4- Calero-Germoni : Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométrie Tome 1