Leçon 153-Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction. Applications.

I. *Polynômes d'endomorphismes*

1. *L'algèbre k[u]*

- Déf : Morphisme $\varphi_u : k[X] \to \mathscr{L}(E), P \mapsto P(u) : k[u] = Im(\varphi_u)$
- Prop : $Ker(\varphi_u) =$ idéal annulateur : engendré par un élément π_u polynôme minimal
- Thm : Isomorphisme $k[X]/(\pi_u) \cong k[u]$

2. *Polynômes annulateurs de u*

- Prop : F SEV stable par u alors $\pi_{u_{|F}}$ divise π_u
- $E = F_1 \oplus F_2$, alors $\pi_u = ppcm(\pi_{u_1}, \pi_{u_2})$
- Déf : Polynôme caractéristique : $\chi_u := det(u - \lambda id)$
- Prop : $deg(\chi_u) = n$
- Prop : λ valeur propre de $u \Leftrightarrow \lambda$ racine de χ_u
- Exemple
- Thm de Cayley Hamilton

3. *Décomposition*

- Déf : Espace caractéristiqe
- Déf : Espace propre :$E_\lambda := ker(u - \lambda id)$
- Lemme des noyaux
- χ_u scindé implique décomposition en espace caractéristique

II. *Réduction d'endomorphismes*

1. *Diagonnalisation*

- u diago $\Leftrightarrow E = \oplus E_\lambda \Leftrightarrow \pi_u$ scindé à racines simples ....
- Exemple : Projecteurs, symétrie et transposition
- **Dev 1 : Endomorphismes semi simples**
- Prop : k algébriquement clos, f semi simple $\Leftrightarrow$ f disgonalisable

2. *Tirigonalisation*

- u trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_u$ scindé $\Leftrightarrow \pi_u$ scindé...
- **Dev 2 : Décomposition de Dunford**
- Exemple

III. *Applications*

- Calcul des puissances d'une matrice
- Exemple
- Système de suites récurrentes
- Système différentiel linéaire à coefficients constants

Bibliographie :

- 1- Rombaldi : Algèbre et géométrie