Leçon 152-Déterminant. Exemples et applications.

I. *Déterminant : généralités*

1. *Formes multilinéaires alternées.*

— Déf : Forme p-linéaire (linéaire par rapport à chacune des p variables)
— Déf : Alternée : $\varphi(x_1,..,x_n)=0 \Leftrightarrow x_i = x_j$ pour $i \neq j$
— Notation : On note $\mathscr{L}_p(E,k)$ l'espace des formes p-linéaires
— Prop : $dim_k(\mathscr{L}_p(E,k)) = n^p$
— Déf : Linéarité : $\varphi(\lambda_1 x_1,\dots,\lambda_p x_p) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^p \varphi(x_1,...,x_p)$
— Prop : $\varphi(0,..,0)=0$
— Prop : φ alternée alors $\varphi(x_1,...,x_n)=0$ pour toute famille liée
— Thm : φ p-linéaire alternée $\Leftrightarrow \forall \sigma \in S_p, (x_1,..,x_p) \in E^p, \varphi(x_{\sigma(1)},..,x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1,..,x_p)$

2. *Déterminant.*

— Thm : L'espace $\mathscr{A}_n(E,k)$ des formes n-linéaires alternées est de dimension 1 engendré par $det_{\mathscr{B}}$: $E^n \to k$ défini par .....
— Déf : On dit que $det_{\mathscr{B}}$ est le déterminant de la base ..
— Prop : Relation de Chasles
— Prop : (x_i) liée $\Leftrightarrow det(x_i)=0 \Leftrightarrow \exists \mathscr{B} | det(x_i)=0$
— Thm : $\varphi(u(x_1),..,u(x_n)) = \lambda_u \varphi(x_1,..,x_n)$ où $\lambda_u = det(u) = det_{\mathscr{B}}(u(e_i))$
— **Dev 1 : Différentielle du déterminant**

II. *Méthode de calcul du déterminant*

1. *Pour une matrice triangulaire par blocs*

— A= $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix}$ alors $det(A) = a_{1,1}det(B)$
— Pour une matrice triangulaire le déterminant est le produit des éléments diagonaux
— M= $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$: $det(M) = det(A)$
— M= $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$: $det(M) = det(A).det(D)$

2. *Pour une matrice qqconque*

— Thm de développement par rapport aux lignes et aux colonnes
— Déf : Comatrice
— Formule pour le déterminant : $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}(com(A))^T$

III. *Exemples d'utilisations du déterminant*

1. *Rang*

— Déf : Rang d'une matrice est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes
— Prop : Pour $u \in \mathscr{L}(E), rg(u) = dim(Im(u))$
— Thm du rang
— Prop : Rang d'une matrice = taille du plus grand mineur non nul
— **Dev 2 : Dimension maximale des sous espaces de matrices de dimension inférieure ou égale à p**

2. Déterminant de Vandermonde

— Déf : $V(\alpha_1,..,\alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$ et $\Delta(\alpha_1,..,\alpha_n) = det(V(\alpha_1,..,\alpha_n))$
— Prop : $\Delta(\alpha_1,..,\alpha_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(\alpha_j - \alpha_i)$
— Applications aux polynômes interpolateur de Lagrange

3. Déterminant de Gramm

— Déf : Matrice + déterminant de Gramm
— Prop : Rang d'une matrice de Gram
— Thm de Meilleure approximation

Bibliographie :

— 1- Rombaldi : Algèbre et géométrie