Leçon 106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie. Sous-groupe de GL(E). Applications.

I. *Le groupe linéaire*

1. *Définitions [1]*

- Déf : $\mathscr{L}(E), GL(E)$
- Remarque : Le choix d'une base implique que $GLn(k) \cong GL(E)$
- Thm : $u \in GL(E) \Leftrightarrow ker(u) = \{0\} \Leftrightarrow rang(u) = n \Leftrightarrow det(u) \neq 0$

2. *Sous-groupe de GL(E) [1]*

- Déf : $SL(E)$ et $SL_n(k)$
- Thm : $SL(E) \lhd GL(E)$ et $GL(E)/SL(E) \cong k^*$
- Déf : Centre de $GL(E)$
- Prop : Sous groupe fini de $GL(E) \Rightarrow$ Tout élément diagonalisable
- **Dev 1 : Thm de Burnside**

3. *Cas $Gl_n(\mathbb{R})$ [2]*

- Def : Action par congruence
- Def : $O_n(\mathbb{R}) = Stab(I_n)$ sous l'action par congruence : c'est un sous groupe de $Gl_n(\mathbb{R})$
- Def : $S_n^{++}(\mathbb{R})$
- **Dev 2 : Décomposition polaire**

II. *Transvection et dilatation*

1. *Transvection [1]*

- Déf : Transvection
- Propriété : u transvection $\Leftrightarrow$ sa matrice dans une base $= I_n + \lambda E_{ij} \Leftrightarrow rg(u - id) = 1$ et $\chi_u = (X-1)^n$

2. *Dilatation [1]*

- Déf : Dilatation
- Prop : u dilatation de rapport $\lambda \Leftrightarrow \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(u) = diag(I_{n-1}, \lambda)$ où $\lambda = det(u)$

3. *Générateur de SL(E) et GL(E) [1]*

- Prop : SL(E) est engendré par les transvection
- Prop : GL(E) est engendré par les transvection et les dilations

III. *Topologie [1]*

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie
- On munit $\mathscr{L}(E)$ d'une norme d'opérateur
- $u \in \mathscr{L}(E), \|u\| < 1, (Id - u) \in GL(E)$ d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$

Bibliographie :
- 1- Rombaldi : Algèbre et géométrie
- 2- Caldero-Germoni : Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométrie