234-Espaces L^p

I. Les espaces L^p

1. Constuctions des espaces L^p [3]p42

— Défintion : $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{T},\mu) = \{f : X \to \mathbb{C}, f$ mesurable et $\int_X |f|^p d\mu < +\infty\}$
— $\|f\|\_\mathscr{L}^p = \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p}$ est une semi norme
— Pour $p = +\infty$, on prend le supess.
— Def : On définit la relation d'équivalence : $f\mathscr{R}g \Leftrightarrow f = g$ pp.
— Def : $L^p(X,\mathscr{T},\mu) = \mathscr{L}^p(X,\mathscr{T},\mu)/\mathscr{R}$
— Def : $\|.\|_p$

2. Définitions et propriétés [1]p54

— Inégalité de Hölder
— Inégalité de Minkowski
— Interpolation :$f \in L^p \cap L^q \Rightarrow f \in L^r$ pour $p \leq r \leq q$
— Prop : $(L^p, \|.\|_p)$ est un espace vectoriel
— **Dev 1 : Riesz Fisher**

3. L'espace de Hilbert : L^2 [3]p49

— Inégalité de Schwarz
— Produit scalaire sur L^2
— Convergence en moyenne quadratique
— L^2 est un espace Hilbert

II. Convolution et régularisation

1. Convolution et translation [3]p114

— Def : $\tau_a f(x) = f(x-a)$
— Pour $f \in L^p(\mathbb{R}), \|\tau_a f\|_p = \|f\|_p$ (invariance de la mesure de Lebesgue)
— $\lim\limits_{a\to 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0$
— Def : $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$
— Thm : Convolution dans L^1 et dans L^p

2. Approximation de l'identité et régularisation[2]p87 et [3]

— Def : Approximation de l'identité
— Exemple : Noyau de Laplace, Cauchy et Gauss
— Thm d'approximation
— **Dev 2** : $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ **dense dans** L^p

Bibliographie :

— 1-Brézis : Analyse fonctionnelle
— 2-El Amari : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels
— 3- Farault : Calcul intégral