Leçon 208 : Espaces vectoriels normés. Applications liéaires. Exemples.

I. Les espaces vectoriels normés

I - 1. Définitions [1]

- Définition : Normes
- Définition : Espace vectoriel normé
- Proposition : Le seul SEV borné est $\{0\}$
- Exemples : normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$
- Prop : Minkowski
- Exemple : Norme sur $B(X, \mathbb{K})$

I - 2. Complétude [1] et [2]

- Définition : Espace de Banach
- Thm : Caractérisation des espaces de Banach (série absoluement cv est cv)
- Exemple : $\mathbb{R}$ complet, $\mathbb{C}$ complet, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet
- **Dev1 : Thm de Riesz-Fisher** [3]

II. Les applications linéaires

II - 1. Continuité des applications linéaires [1]

- Thm : f continue $\Leftrightarrow$ f continue en 0 $\Leftrightarrow$ f lipschitzienne $\Leftrightarrow \exists k; \|f(x)\| \leq k\|x\|$
- Exemple : L'application qui à f associe ses coefficients de Fourier est linéaire continue
- Exemple d'application linéaire non-continue
- Prop : Noyau d'un hyperplan

II - 2. Norme sur l'espace $\mathscr{L}_c(E,F)$ [1]

- Définition : Norme subordonée
- Prop : Caractérisation de la norme subordonnée
- Exemple de norme subordonnée
- Thm de Banach Steinhauss
- **Dev 2 : Série de Fourier divergente [2]**
- F complet $\Leftrightarrow \mathscr{L}_c(E,F)$ complet

III. Espaces vectoriels normés de dimension finie [1]

- Prop :En dimension finie toutes les normes sont équivalentes
- Corollaire : Compact $\Leftrightarrow$ fermé borné
- Corollaire : EVN de dim finie $\Leftrightarrow$ Complet
- Thm : En dim finie, toute application linéaire est continue
- Thm de Riesz

Bibliographie :

- 1-Pommellet : Cours d'analyse
- 2-Gourdon : Analyse
- 3-Brézis : Analyse fonctionnelle