Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

1 Définition et premières propriétés

Définition 1. On dit qu'une v.a. est discrète s'il existe une partie finie ou dénombrable $D \subseteq \mathbf{R}^d$ telle que $X(\Omega) = D$.

Théorème 2 (transfert)**.** *Soit X une v.a. discrète et $D \subseteq \mathbf{R}^d$ fini ou dénombrable tel que $X(\Omega) = D$. Soit $g : D \to \mathbf{R}$ mesurable, alors $g(X)$ est intégrable ssi $\sum_{x\in D} |g(x)|\mathbf{P}(X = x)$ est fini et alors :*

$$\mathbf{E}[g(X)] = \sum_{x\in D} g(x)\mathbf{P}(X = x)$$

Définition 3. On dit des v.a. (X_n) sont indépendantes si pour toute partie finie $I \subseteq \mathbf{N}$ et pour tous boréliens $(B_i)_{i\in I}$, on a $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I}\{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i\in I} \mathbf{P}(X_i \in B_i)$.

Proposition 4. *Soient (X_n) des v.a. discrètes, alors les (X_n) sont indépendantes ssi pour toute partie finie $I \subseteq \mathbf{N}$ et pour tous $x_i \in X_i(\Omega)$, $i \in I$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I}\{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i\in I} \mathbf{P}(X_i = x_i)$.*

Définition 5. Soit X une v.a. réelle. On appelle fonction de répartition de X la fonction $F_X : \mathbf{R} \to [0,1]$ définie par $F_X(t) = \mathbf{P}(X \leqslant t)$.

Proposition 6. *Soit X une v.a. réelle.*

1. *F_X est croissante, continue à droite en tout point et admet une limite à gauche en tout point.*
2. *$\lim_{-\infty} F_X = 0$ et $\lim_{+\infty} F_X = 1$.*
3. *F_X est continue en un point x ssi $\mathbf{P}(X = x) = 0$.*
4. *L'ensemble des points de discontinuité de F est au plus dénombrable.*
5. *F_X caractérise la loi : si $F_X = F_Y$ alors X et Y ont la même loi.*

Application 7. Soient $X_1,\dots,X_n$ des v.a. indépendantes avec X_i de loi $\mathscr{G}(p_i)$, $p_i \in]0,1[$. Alors $\min(X_1,\dots,X_n)$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$.

2 Lois usuelles

Définition 8.

1. On considère une épreuve de Bernoulli, c'est-à-dire une expérience aléatoire n'admettant que deux résultats possibles appelés *succès* et *échec* (de probabilités resp. p et $q = 1 - p$). La loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathscr{B}(p)$, est la loi de la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.
2. On considère n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. La loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n,p)$, est la loi de la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus.
$$\forall k \in \{0,\dots,n\},\ \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
Son espérance vaut np et sa variance $np(1-p)$.

Application 9 (polynômes de Bernstein)**.** Soit $f \in \mathrm{C}([0,1])$, on lui associe le n–ième polynôme de Bernstein :

$$B_n[f](x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Alors on a la majoration suivante :

$$\|B_n[f] - f\|_\infty \leqslant \frac{3}{2}\,\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

L'ensemble des fonctions polynomiales est donc dense dans $C([0,1])$. De plus, il existe une fonction lipschitzienne f et une constante $C > 0$ telle que $\|B_n[f] - f\|_\infty \geqslant C\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Définition 10. On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. La loi géométrique de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$, est la loi de la variable aléatoire qui compte le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès.

$$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \mathbf{P}(X = k) = q^{k-1} p$$

Son espérance vaut $\frac{1}{p}$ et sa variance $\frac{q}{p^2}$.

Définition 11. On appelle loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, la loi sur $\mathbf{N}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Son espérance et sa variances valent λ.

Définition 12 (loi multinomiale)**.** On considère une urne contenant k sortes de boules. On va précéder au tirage de n boules avec remise (les tirages sont indépendants). On note p_i la probabilité de tirer une boule de type i et on note Z_i le nombre de boules de type i que l'on a tirées. La loi de $Z = (Z_1, \dots, Z_k)$ est appelée la loi multinomiale de paramètres n et $p = (p_1, \dots, p_k)$.

Alors Z est une v.a. discrète à valeurs dans $D = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{N}^k \mid \sum x_i = n\}$ et si $x \in D$, alors $\mathbf{P}(Z = x) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}$. De plus, Z a pour espérance le vecteur np et pour matrice de covariance Γ.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} np_1(1-p_1) & -np_1p_2 & \cdots & -p_1p_n \\ -np_1p_2 & np_2(1-p_2) & & -p_2p_k \\ \cdots & & \ddots & \vdots \\ -p_1p_k & -p_2p_k & \cdots & np_k(1-p_k) \end{bmatrix}$$

3 Fonctions génératrices

Définition 13. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbf{N}$. On appelle fonction génératrice de X la fonction $G_X(s) = \mathbf{E}[s^X]$.

Remarque 14. La fonction génératrice est liée à la fonction caractéristique par la relation $\varphi_X(t) = G_X(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$.

Proposition 15. *Soit X une v.a. à valeurs dans* $\mathbf{N}$.

1. *La fonction génératrice est bien définie sur* $\overline{\mathrm{D}}(0,1)$.
2. *La fonction génératrice est continue sur* $\overline{\mathrm{D}}(0,1)$ *et holomorphe sur* $\mathrm{D}(0,1)$. *Ses dérivées sont données par :*

$$G_X^{(n)}(s) = \mathbf{E}\left[X(X-1)\cdots(X-n+1)s^{X-n}\right]$$

3. *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$. En particulier, la fonction génératrice caractérise la loi.*

Exemple 16.

1. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $G_X(s) = (q+ps)^n$.
2. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $G_X(s) = \frac{ps}{1-qs}$.
3. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $G_X(s) = e^{-\lambda(1-s)}$.

Proposition 17. *Si deux v.a. entières X et Y sont indépendantes, alors* $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Application 18. Soient X et Y deux v.a. indépendantes avec $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Alors $X + Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Application 19. Il est impossible de piper deux dés à 6 faces pour que la loi de la somme des dés soit la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$.

Théorème 20. *Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbf{N}$. Alors* $\lim_{s\to1^-} G_X^{(n)}(s) = \mathbf{E}[X(X-1)\cdots(X-n+1)] \in [0,+\infty]$.

Proposition 21. *Soient N une v.a. dans $\mathbf{N}^*$ et (X_n) des v.a. entières indépendantes et de même loi. Posons $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et soit $S = S_N$. Alors $G_S = G_N \circ G_X$.*

Corollaire 22. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, si N et X admettent une espérance alors S admet une espérance et* $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X)$.

Application 23 (processus de Galton–Watson)**.** Soient $(X_{n,j})$ des v.a. dans $\mathbf{N}$ indépendantes et de même loi μ admettant une espérance m. On suppose que $\mu(0) > 0$. On note $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_{n+1,j}$. On s'intéresse la probabilité de l'évènement « extinction » $E = \bigcup_n \{Z_n = 0\}$. Alors si $m \leqslant 1$, $\mathbf{P}(E) = 1$ et si $m > 1$ alors $\mathbf{P}(E) < 1$.

4 Convergence en loi

Définition 24. On dit qu'une suite de v.a. (X_n) converge vers X en loi si pour toute fonction f continue bornée, $\mathbf{E}[f(X_n)] \to \mathbf{E}[f(X)]$.

Théorème 25. *Soient (X_n) et X des v.a. à valeurs dans un ensemble dénombrable $D \subseteq \mathbf{R}^d$. Si pour tout $k \in D$, $\mathbf{P}(X_n = k) \to \mathbf{P}(X = k)$, alors (X_n) converge en loi vers X.*

Application 26. Soit (X_n) des v.a. telles que X_n suit la loi $\mathscr{B}(n, p_n)$ avec $np_n \to \lambda > 0$. Alors X_n converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre λ.

Théorème 27 (Lévy)**.** *Soit (X_n) une suite de v.a. et X une v.a. Alors $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ ssi $\forall\, t \in \mathbf{R}^d$, $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$.*

Application 28. Soit (X_n) une suite de v.a. telle que X_n suit la loi $\mathscr{G}(p_n)$ avec $np_n \to \lambda > 0$. Alors $\frac{X_n}{n}$ converge en loi vers $\mathscr{E}(\lambda)$.

Théorème 29 (théorème central limite)**.** *Soit $(X_n)_{n\geqslant1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de carré intégrable. Notons m leur espérance et σ^2 leur variance. Notons $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Alors :*

$$\sqrt{n}\big(\overline{X}_n - m\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,\sigma^2)$$

Application 30 (sondage)**.** Soit $(X_n)_{n\geqslant1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi $\mathscr{B}(p)$. Notons $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. On se donne $\alpha \in \,]0,1[$. Soit

$$\hat{I}_n = \left[\overline{X}_n - q_\alpha \frac{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}{\sqrt{n}} ; \overline{X}_n + q_\alpha \frac{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}{\sqrt{n}}\right]$$

où q_α vérifie $\mathbf{P}(Z \leqslant q_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ pour Z de loi $\mathscr{N}(0,1)$. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(m \in \hat{I}_n) = 1 - \alpha$$

Développements

1. Polynômes de Bernstein. **[9]**
2. Processus de Galton–Watson. **[23]**

Références

— Apel, *Probabilités pour les non probabilistes.*
— Bercu et Chafaï, *Modélisation stochastique et simulation.*
— Garet et Kurtzman, *De l'intégration aux probabilités.*
— Ouvrard, *Probabilités 1.*
— Queffélec et Zuily, *Analyse pour l'agrégation.*