# Leçon 262 : Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On considèrera des variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbf{R}^d, \mathscr{B}(\mathbf{R}^d))$. On notera $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbf{R}^d$.

## 1 Convergence en probabilité et convergence p.s.

**Définition 1.** Soit $(X_n)$ une suite de v.a. On dit que $(X_n)$ converge vers une v.a. $X$ presque sûrement si $\mathbf{P}(X_n \to X) = 1$. On note $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$.

**Définition 2.** Soit $(X_n)$ une suite de v.a. On dit que $(X_n)$ converge vers une v.a. $X$ en probabilité si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbf{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) \to 0$. On note $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$.

**Proposition 3.** *Si une suite de v.a. converge p.s. alors elle converge en probabilité.*

**Définition 4.** Soit $(A_n)$ une suite d'évènements. On définit la limite supérieure, resp. inférieure, de la suite $(A_n)$ par :

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \bigcup_{k\geqslant n} A_k, \quad \liminf_n A_n = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \bigcap_{k\geqslant n} A_k$$

**Lemme 5** (Borel–Cantelli)**.** *Soit $(A_n)$ une suite d'évènements.*

1. *Si $\sum \mathbf{P}(A_n)$ est finie, alors $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$.*
2. *Si $\sum \mathbf{P}(A_n)$ est infinie et si les $(A_n)$ sont indépendants, alors $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 1$.*

**Théorème 6.** *Soit $(X_n)$ une suite qui converge en probabilité vers $X$, alors il existe une sous-suite $(X_{n_k})$ qui converge vers $X$ p.s.*

**Corollaire 7.** *Soit $(X_n)$ une suite de v.a. qui converge en probabilité vers $X$ et soit $f$ une fonction continue. Alors $f(X_n)$ converge en probabilité vers $f(X)$.*

**Proposition 8.** *Soit $(X_n)$ une suite de v.a. et $X$ une v.a.*

1. *Si $\forall \varepsilon > 0$, $\sum \mathbf{P}(\|X_n - X\| \geqslant \varepsilon)$ est finie, alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.*
2. *Si les $(X_n)$ sont indépendants, alors $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$ ssi pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum \mathbf{P}(\|X_n\| \geqslant \varepsilon)$ est finie.*

**Exemple 9.** Soit $(X_n)$ une suite de v.a. indépendantes avec $X_n$ de loi $\mathscr{B}(p_n)$. Alors :

1. $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ ssi $p_n \to 0$.
2. $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$ ssi $\sum p_n$ est finie.

## 2 Convergence dans $\mathrm{L}^p$

**Définition 10.** Soit $(X_n)$ une suite de v.a. dans $\mathrm{L}^p$. On dit que $(X_n)$ converge vers $X$ dans $\mathrm{L}^p$ si $\mathbf{E}(\|X_n - X\|^p) \to 0$. On note $X_n \xrightarrow{\mathrm{L}^p} X$.

**Proposition 11** (Hölder)**.** *Soient $p, q \in [1, \infty]$ des exposants conjugués, et soient $X \in \mathrm{L}^p$ et $Y \in \mathrm{L}^q$. Alors $XY$ est intégrable et $\mathbf{E}(|XY|) \leqslant \mathbf{E}(|X|^p)^{\frac{1}{p}} \mathbf{E}(|Y|^q)^{\frac{1}{q}}$.*

**Corollaire 12.** *Soit $q > p$ et $(X_n)$ une suite de v.a. dans $\mathrm{L}^q$. Si $(X_n)$ converge vers $X$ dans $\mathrm{L}^q$ alors $(X_n)$ converge vers $X$ dans $\mathrm{L}^p$.*

*Remarque* 13. La réciproque est fausse : $\Omega = [0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue et $X_n = n\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n^2}]}$. Alors $X_n$ converge vers 0 dans $\mathrm{L}^1$ mais pas dans $\mathrm{L}^2$.

**Proposition 14** (Markov)**.** *Soit $X$ une v.a.r. positive. Alors pour tout $t > 0$, $\mathbf{P}(X \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X)}{t}$.*

**Corollaire 15** (Bienaymé–Tchebytchev)**.** *Soit $X$ une v.a.r de carré intégrable, alors pour tout $t>0$, $\mathbf{P}(|X-\mathbf{E}(X)|\geqslant t)\leqslant\frac{\mathrm{Var}(X)}{t^2}$.*

**Proposition 16.** *Si $(X_n)$ converge vers $X$ dans $\mathrm{L}^p$, alors $(X_n)$ converge vers $X$ en probabilité. En particulier, on peut extraire une sous-suite qui converge p.s.*

*Remarque* 17. La réciproque est fausse : $\Omega=[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue et $X_n=n\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$. Alors $(X_n)$ converge vers 0 en probabilité (et même p.s.) mais ne converge pas vers 0 dans $\mathrm{L}^1$.

**Application 18** (polynômes de Bernstein)**.** Soit $f\in\mathrm{C}([0,1])$, on lui associe le $n$–ième polynôme de Bernstein :

$$B_n[f](x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Alors $B_n[f]$ converge uniformément vers $f$. L'ensemble des fonctions polynomiales est donc dense dans $\mathrm{C}([0,1])$.

**Théorème 19** (loi faible des grands nombres)**.** *Soit $(X_n)$ une suite i.i.d. de v.a.r $\mathrm{L}^2$. Notons $m=\mathbf{E}(X_1)$ et $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. Alors $\overline{X}_n$ converge vers $m$ dans $\mathrm{L}^2$ et en probabilité.*

## 3 Convergence en loi

**Définition 20.** Soit $(\mu_n)$ une suite de probabilités. On dit que $(\mu_n)$ converge étroitement vers la probabilité $\mu$ si pour toute fonction $f$ continue bornée, $\int_{\mathbf{R}^d}f\,\mathrm{d}\mu_n\to\int_{\mathbf{R}^d}f\,\mathrm{d}\mu$.
On dit qu'une suite de v.a. $(X_n)$ converge vers $X$ en loi si la suite des lois des $(X_n)$ converge étroitement vers la loi de $X$, c'est-à-dire si pour toute fonction continue bornée $f$, $\mathbf{E}[f(X_n)]\to\mathbf{E}[f(X)]$.

**Proposition 21.** *Soit $g$ une fonction continue sur $\mathbf{R}^d$. Si $(X_n)$ converge en loi vers $X$ alors $g(X_n)$ converge en loi vers $g(X)$.*

**Lemme 22** (Scheffé)**.** *Soit $(E,\mathscr{E},\mu)$ un espace mesuré et $f,(f_n)$ des fonctions mesurables positives intégrables sur $E$. On suppose que :*

1. *$f_n\to f$ $\mu$–p.p.*
2. *$\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu\to\int_E f\,\mathrm{d}\mu$*

*Alors $f_n\to f$ dans $\mathrm{L}^1$.*

**Corollaire 23.**

1. *Soit $(X_n)$ une suite de v.a. admettant des densités $(f_n)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$. Soit $X$ admettant une densité $f$ telle que $f_n\to f$ p.p. Alors $(X_n)$ converge en loi vers $X$.*
2. *Soient $(X_n)$ et $X$ des v.a. à valeurs dans un ensemble dénombrable $D\subseteq\mathbf{R}^d$. Si pour tout $k\in D$, $\mathbf{P}(X_n=k)\to\mathbf{P}(X=k)$, alors $(X_n)$ converge en loi vers $X$.*

**Application 24.** Soit $(X_n)$ une suite de v.a. où $X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p_n)$. On suppose que $np_n\to\lambda>0$. Alors $X_n\xrightarrow{\mathscr{L}}\mathscr{P}(\lambda)$.

**Théorème 25** (Portmanteau)**.** *Soient $(\mu_n)$ une suite de probabilité et $\mu$ une probabilité. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mu_n$ converger étroitement vers $\mu$.*
2. *Pour toute fonction $f$ uniformément continue et bornée, $\int_{\mathbf{R}^d}f\,\mathrm{d}\mu_n\to\int_{\mathbf{R}^d}f\,\mathrm{d}\mu$.*
3. *Pour tout fermé $F$, $\mu(F)\geqslant\limsup_n\mu_n(F)$.*
4. *Pour tout ouvert $U$, $\mu(U)\leqslant\liminf_n\mu_n(U)$.*
5. *Pour tout borélien $B$ tel que $\mu(\partial B)=0$, $\lim_n\mu_n(A)=\mu(A)$.*
6. *Pour tout pavé $P$ tel que $\mu(\partial P)=0$, $\lim_n\mu_n(P)=\mu(P)$.*

**Corollaire 26.** *Soit $(X_n)$ une suite de v.a.r. de fonctions de répartition $(F_n)$. Soit $X$ une v.a.r. de fonction de répartition $F$. Alors $(X_n)$ converge en loi vers $X$ ssi pour tout $x$ point de continuité de $F$, $F_n(x) \to F(x)$.*

**Exemple 27.** Soit $(X_n)$ une suite de v.a. de loi $\mathscr{U}([0,\theta])$ avec $\theta > 0$. Posons $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Alors $n(\theta - M_n) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{E}(\frac{1}{\theta})$.

**Théorème 28.** *Soit $(X_n)$ une suite de v.a. et une $X$ une v.a.*

1. *$X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.*
2. *Si $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} a$ avec $a$ constante, alors $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} a$.*

**Lemme 29** (Slutsky)**.** *Si $(X_n)$ converge en loi vers $X$ et $(Y_n)$ converge en loi vers une constante $y$, alors $(X_n, Y_n)$ converge en loi vers $(X, y)$.*

**Définition 30.** Si $X$ est une v.a. on définit sa fonction caractéristique par $\varphi(t) = \mathbf{E}[e^{i\langle t|X\rangle}]$, $t \in \mathbf{R}^d$.

**Théorème 31** (Lévy)**.** *Soit $(X_n)$ une suite de v.a. et $X$ une v.a. Alors $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ ssi $\forall\, t \in \mathbf{R}^d$, $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$.*

## 4 Théorèmes limites

**Théorème 32** (loi forte des grands nombres $L^2$)**.** *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a.r. de carré intégrable, deux à deux non corrélées, telles que* $\sup_n \operatorname{Var}(X_n) < \infty$. *Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, alors :*

$$\frac{S_n - \mathbf{E}[S_n]}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$$

**Corollaire 33.** *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de carré intégrable. Notons $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $m = \mathbf{E}(X_1)$. Alors $\overline{X}_n$ converge vers $m$ p.s.*

*Remarque* 34. Ce dernier résultat est vrai sous l'hypothèse que les v.a. sont simplement $L^1$. *(admis)*

**Théorème 35** (théorème central limite)**.** *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de carré intégrable. Notons $m$ leur espérance et $\sigma^2$ leur variance. Notons $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Alors :*

$$\sqrt{n}\big(\overline{X}_n - m\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0, \sigma^2)$$

**Application 36** (intervalle de confiance asymptotique)**.** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de carré intégrable. Notons $m$ leur espérance et $\sigma^2$ leur variance. Soient $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$. On se donne $\alpha \in \,]0,1[$. Alors :

1. $\overline{X}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$ convergent p.s. vers $m$ et $\sigma^2$. On dit que ce sont des estimateurs consistants de $m$ et $\sigma^2$.
2. Soit $\hat{I}_n = \left[\overline{X}_n - q_\alpha \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}; \overline{X}_n + q_\alpha \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right]$ où $q_\alpha$ vérifie $\mathbf{P}(Z \leqslant q_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ pour $Z$ de loi $\mathscr{N}(0,1)$. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(m \in \hat{I}_n) = 1 - \alpha$$

**Application 37** (formule de Stirling)**.** On a l'équivalent $n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$.

# Développements

1. Loi des grands nombres $L^2$. **[32]**
2. Formule de Stirling par le TCL. **[37]**

## Références


— Barbe et Ledoux, *Probabilités.*
— Garet et Kurtzman, *De l'intégration aux probabilités.*
— Ouvrard, *Probabilités 2.*