Leçon 261 : Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On considèrera des variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbf{R}^d, \mathscr{B}(\mathbf{R}^d))$. On notera $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^d$.

1 Définitions et premières propriétés

Définition 1. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^d$, on appelle fonction caractéristique de μ la fonction $\varphi_\mu : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ définie par $\varphi_\mu(t) = \int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t|x\rangle}\,\mathrm{d}\mu(x)$.
Si X est une v.a. on appelle fonction caractéristique de X la fonction caractéristique de sa loi.

Proposition 2. *Par le théorème de transfert, $\varphi_X(t) = \mathbf{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t|X\rangle}]$.*

Proposition 3. *Soit X une v.a. dans $\mathbf{R}^d$, de fonction caractéristique φ.*

1. $\varphi(0) = 1$
2. $\forall t \in \mathbf{R}^d$, $|\varphi(t)| \leqslant 1$
3. $\forall t \in \mathbf{R}^d$, $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$
4. *Soient $A \in \mathscr{M}_{n,d}(\mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^n$. Notons $Y = AX + b$, alors $\varphi_Y(t) = \varphi_X({}^{\mathrm{t}}At)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle b|t\rangle}$.*
5. *La fonction φ est uniformément continue.*

Proposition 4 (formule d'inversion)**.** *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$. Alors :*

$$\mu(]a,b[) + \frac{\mu(\{a\}) + \mu(\{b\})}{2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}tb}}{\mathrm{i}t} \varphi_\mu(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 5. *La fonction caractéristique caractérise la loi : si μ et ν sont deux probabilités sur $\mathbf{R}^d$, alors $\varphi_\mu = \varphi_\nu \iff \mu = \nu$.*

Corollaire 6. *Soient X une v.a. dans $\mathbf{R}^d$ et Y une v.a. dans $\mathbf{R}^p$. Alors X et Y sont indépendantes ssi pour tout $(t,s) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^p$, $\varphi_{(X,Y)}(t,s) = \varphi_X(t)\varphi_Y(s)$.*

Remarque 7. Dans le cas où X admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$, alors $\varphi_X(t) = \hat{f}(-t)$ où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f, définie par $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\xi|x\rangle}\,\mathrm{d}x$.

Exemple 8.

1. Si $X \sim \mathscr{U}([-1,1])$, alors $\varphi_X(t) = \frac{\sin t}{t}$.
2. Si $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$, alors $\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}t}$.
3. Si $X \sim \mathscr{N}(m, \sigma^2)$, alors $\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}\mathrm{e}^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$.
4. Si $X \sim \mathscr{C}(1)$, alors $\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$.

Proposition 9. *Soient X et Y deux v.a. indépendantes. Alors $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.*

Application 10. Soit N v.a. entière de loi $\mathscr{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$ et soit (X_n) une suite i.i.d. avec X_n de loi $\mathscr{E}(\lambda)$. Notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, alors S_N suit la loi $\mathscr{E}(\lambda p)$.

2 Vecteurs gaussiens

Définition 11. On dit qu'une v.a. X est un vecteur gaussien si pour tout $a \in \mathbf{R}^d$, $\langle X \mid a\rangle$ suit une loi gaussienne.

Exemple 12. Si $X_1, \ldots, X_d$ sont des v.a. i.i.d. de loi $\mathscr{N}(0,1)$ alors $(X_1, \ldots, X_d)$ est un vecteur gaussien, de moyenne 0 et de matrice de covariance I_d.

Proposition 13. *L'image d'un vecteur gaussien d'espérance m et de matrice de covariance Γ par une application affine $x \mapsto Ax+b$ et encore un vecteur gaussien, d'espérance $Am+b$ et de matrice de covariance $A\Gamma{}^{\mathrm{t}}A$.*

Théorème 14. *Soit X une v.a. L^2 d'espérance m et de matrice de covariance Γ. Alors X est un vecteur gaussien ssi $\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle m|t\rangle}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\langle \Gamma t|t\rangle}$.*

Corollaire 15. *Si deux vecteurs gaussiens ont même espérance et même matrice de covariance, alors ils ont la même loi. On note $\mathcal{N}(m,\Gamma)$ la loi d'un vecteur gaussien d'espérance m et de matrice de covariance Γ.*

Théorème 16. *Des variables gaussiennes sont indépendantes ssi elles sont deux à deux non corrélées, c'est-à-dire ssi leur matrice de covariance est diagonale.*

3 Moments d'une v.a.r.

Théorème 17. *Soit X une v.a.r. et soit φ sa fonction caractéristique.*

1. *Si X admet un moment d'ordre $n \in \mathbf{N}^*$, alors φ est de classe C^n et pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $\varphi^{(k)}(t) = \mathrm{i}^k\mathbf{E}(X^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})$. En particulier, $\varphi^{(k)}(0) = \mathrm{i}^k\mathbf{E}(X^k)$.*
2. *Si φ est k fois dérivable en 0 (avec $k \geqslant 2$), alors X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$.*

Application 18. Soit X de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors X admet des moments de tout ordre et ceux-ci sont donnés par :

$$\mathbf{E}(X^{2k+1}) = 0, \quad \mathbf{E}(X^{2k}) = 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2k-1)$$

Remarque 19. Les moments ne suffisent pas à caractériser une loi en général : par exemple, si Z suit la loi log-normale (c'est-à-dire $\log(Z)$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$), notons Z_a la v.a. admettant pour densité $f_a(x) = f(x)(1+a\sin(2\pi\log x))$ sur $\mathbf{R}_+^*$ où $a \in [-1,1]$ et f est la densité de Z. Alors Z et Z_a ont les mêmes moments.

Théorème 20 (des moments)**.** *Soit X une v.a.r. de fonction caractéristique φ.*

1. *Si X admet un moment d'ordre n, alors φ admet un développement limité à l'ordre n en 0 :*
$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!}\mathbf{E}[X^k] + \frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!}\varepsilon_n(t)$$
avec $|\varepsilon_n(t)| \leqslant 2\mathbf{E}(|X|^n)$ et $\lim_{t\to 0}\varepsilon_n(t) = 0$.
2. *Si X admet des moment à tout ordre et si $\limsup_n \frac{\mathbf{E}(|X^n|)^{1/n}}{n} = \frac{1}{R} < \infty$ alors φ est développable en série entière au voisinage de tout réel avec un rayon de convergence supérieur à $\frac{R}{\mathrm{e}}$. En particulier, les moments caractérisent la loi.*

4 Convergence en loi

Définition 21. Soit (μ_n) une suite de probabilités. On dit que (μ_n) converge étroitement vers la probabilité μ si pour toute fonction f continue bornée, $\int_{\mathbf{R}^d} f\,\mathrm{d}\mu_n \to \int_{\mathbf{R}^d} f\,\mathrm{d}\mu$.
On dit qu'une suite de v.a. (X_n) converge vers X en loi si la suite des lois des (X_n) converge étroitement vers la loi de X, c'est-à-dire si pour toute fonction continue bornée f, $\mathbf{E}[f(X_n)] \to \mathbf{E}[f(X)]$.

Définition 22. On dit qu'une famille $\mathcal{M}$ de mesures de probabilité sur $\mathbf{R}^d$ est tendue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de $\mathbf{R}^d$ tel que $\forall \mu \in \mathcal{M}$, $\mu(\mathbf{R}^d \setminus K) \leqslant \varepsilon$.

Théorème 23 (Prohorov)**.** *Si une suite (μ_n) de mesures de probabilité est tendue, alors on peut extraire une sous-suite qui converge étroitement vers une mesure de probabilité μ.*

Corollaire 24. *Soit (μ_n) une suite tendue de mesures de probabilité telle que toute sous-suite de (μ_n) qui converge étroitement converge vers μ. Alors (μ_n) converge étroitement vers μ.*

Théorème 25 (Lévy)**.** *Soit (X_n) une suite de v.a. et X une v.a. Alors $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ ssi $\forall\, t \in \mathbf{R}^d$, $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$.*

Théorème 26 (loi faible des grands nombres L^1)**.** *Soit (X_n) une suite de v.a.r. L^1. Notons $m = \mathbf{E}(X_1)$ et $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Alors (X_n) converge vers X en probabilité : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(|\overline{X}_n - m| \geqslant \varepsilon) \to 0$.*

Théorème 27 (théorème central limite)**.** *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de carré intégrable. Notons m leur espérance et σ^2 leur variance. Notons $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Alors :*

$$\sqrt{n}\big(\overline{X}_n - m\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,\sigma^2)$$

Lemme 28. *Soit (X_n) une suite de vecteurs aléatoires et X un vecteur aléatoire. Si pour tout $a \in \mathbf{R}^d$, $\langle X_n \mid a\rangle$ converge en loi vers $\langle X \mid a\rangle$, alors (X_n) converge en loi vers X.*

Théorème 29 (TCL multidimensionnel)**.** *Soit (X_n) une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. L^2. On note m leur espérance et Γ leur matrice de covariance. Alors :*

$$\sqrt{n}\big(\overline{X}_n - m\big) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,\Gamma)$$

Application 30 (intervalle de confiance asymptotique)**.** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de carré intégrable. Notons m leur espérance et σ^2 leur variance. Soient $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$. On se donne $\alpha \in\,]0,1[$. Alors :

1. $\overline{X}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$ convergent p.s. vers m et σ^2. On dit que ce sont des estimateurs consistants de m et σ^2.
2. Soit $\hat{I}_n = \left[\overline{X}_n - q_\alpha \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} ; \overline{X}_n + q_\alpha \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right]$ où q_α vérifie $\mathbf{P}(Z \leqslant q_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ pour Z de loi $\mathscr{N}(0,1)$. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(m \in \hat{I}_n) = 1 - \alpha$$

Application 31 (formule de Stirling)**.** On a l'équivalent $n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n}$.

Développements

1. Fonction caractéristique de la loi normale et de la loi de Cauchy. **[8]**
2. Fonction caractéristique et moments. **[17]**

Références

- BARBE et LEDOUX, *Probabilités.*
- BERCU et CHAFAÏ, *Modélisation stochastique et simulation.*
- CARRIEU, *Probabilité – Exercices corrigés.*
- GARET et KURTZMAN, *De l'intégration aux probabilités.*
- OUVRARD, *Probabilités 2.*