Leçon 234 : Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

1 Construction de L^p

Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 1. Soit $p \in [1, \infty[$, on définit l'espace $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables f telles que $\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu$ est fini. On note $\mathrm{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ le quotient de $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ par la relation d'équivalence « égalité μ–p.p. ».
On définit pour $f \in \mathrm{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ la quantité $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

Définition 2. Pour f mesurable positive, on définit la quantité $\operatorname{ess\,sup}(f) = \inf\{M > 0 \mid \mu(\{f > M\}) = 0\}$. On pose $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}(|f|)$ et on note $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables telles que $\|f\|_\infty$ est fini. On note $\mathrm{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ le quotient de $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ par la relation d'équivalence « égalité μ–p.p. ».

Remarque 3. Si μ est la mesure de comptage sur $\big(\mathbf{N}, \mathscr{P}(\mathbf{N})\big)$, alors on note $\ell^p(\mathbf{N})$.

Définition 4. Soient $p, q \in [1, \infty]$, on dit que p et q sont des exposants conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$.

Proposition 5 (Hölder)**.** *Soient $p, q \in [1, \infty]$ des exposants conjugués et soient $f \in \mathrm{L}^p$ et $g \in \mathrm{L}^q$. Alors le produit fg est dans L^1 et on a $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.*

Proposition 6 (Minkowski)**.** *Soit $p \in [1, \infty]$ et soient $f, g \in \mathrm{L}^p$. Alors on a l'inégalité $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.*

Corollaire 7. *Pour tout $p \in [1, \infty]$, l'espace $\mathrm{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est un e.v.n. pour la norme $\|\cdot\|_p$.*

Proposition 8.

1. *Si la mesure μ est finie, alors pour tous $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, on a l'inclusion $\mathrm{L}^q(\mu) \subseteq \mathrm{L}^p(\mu)$.*
2. *Si μ est la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$, alors pour tous $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, on a l'inclusion $\ell^p(\mathbf{N}) \subseteq \ell^q(\mathbf{N})$.*

Exemple 9. Sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}), \lambda)$, la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbf{1}_{]0,1]}(x)$ est dans L^1 mais pas dans L^2, et la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$ est dans L^2 mais pas dans L^1.

Théorème 10. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $\mathrm{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_p$. De plus, si (f_n) converge dans L^p alors on peut extraire une sous-suite qui converge μ–p.p.*

Exemple 11. On considère la suite de fonctions $f_{n,k} = \mathbf{1}_{[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}[}$ pour $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$. Alors $f_{n,k}$ converge vers 0 dans L^p lorsque $n \to \infty$ mais ne converge pas p.p.

Théorème 12. *Soit $p \in [1, \infty[$, on se place sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}), \lambda)$.*

1. *L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbf{R})$.*
2. *L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbf{R})$.*

Corollaire 13. *L'espace $\mathrm{L}^p(\mathbf{R})$ est séparable pour $p \in [1, \infty[$. Par contre $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R})$ n'est pas séparable.*

2 Densité et convolution

Définition 14. On appelle produit de convolution de f et g la fonction $f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y) g(x - y) \,\mathrm{d}y$, lorsque celle-ci est bien définie.

Lemme 15. *Soit $p \in [1,\infty[$, alors pour tout $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R})$, l'application $a \in \mathbf{R} \mapsto \tau_a f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R})$ est uniformément continue.*

Proposition 16.

1. *Soient $p, q \in [1,\infty]$ des exposants conjugués et soient $f \in \mathrm{L}^p$ et $g \in \mathrm{L}^q$. Alors $f * g$ est bien définie sur $\mathbf{R}$, elle est uniformément continue, bornée et $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$. De plus, si $p \in]1,\infty[$, alors $f * g(x)$ tend vers 0 lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$.*
2. *Soit $p \in [1,\infty]$ et soient $f \in \mathrm{L}^1$ et $g \in \mathrm{L}^p$, alors $f * g$ existe p.p. et $f * g \in \mathrm{L}^p$. Plus précisément, $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$.*

Proposition 17.

1. *Soient $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ et g bornée, dérivable et de dérivée continue bornée, alors $f * g$ est dérivable et $(f * g)' = f * (g')$.*
2. *Soient $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R})$ et g dérivable et intégrable de dérivée continue et intégrable, alors $f * g$ est dérivable et $(f * g)' = f * (g')$.*

Définition 18. On dit que (φ_n) est une suite d'approximation de l'unité si :

1. $\varphi_n \geqslant 0$ p.p. pour tout $n \in \mathbf{N}$;
2. $\int \varphi_n = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$;
3. pour tout $\delta > 0$, $\int_{|x|>\delta} \varphi_n$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Exemple 19. Si φ est L^1 positive d'intégrale 1 alors $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$ est une approximation de l'unité. Par exemple pour $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ ou pour $\varphi(x) = C \exp(-\frac{1}{1-x^2}) \mathbf{1}_{[-1;1]}(x)$ avec C constante de normalisation.

Théorème 20. *Soit (φ_n) une suite d'approximation de l'unité.*

1. *Si f est continue bornée, alors $f * \varphi_n$ converge uniformément sur tout compact vers f.*
2. *Soit $p \in [1,\infty[$, si $f \in \mathrm{L}^p$ alors $f * \varphi_n$ converge vers f dans L^p.*

Corollaire 21. *L'ensemble des fonctions $\mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbf{R})$, pour $p \in [1,\infty[$.*

3 Structure hilbertienne de L^2

Proposition 22. *Sur $\mathrm{L}^2(X, \mathscr{A}, \mu)$, on définit la forme sesquilinéaire suivante $\langle f \mid g \rangle = \int_X f \overline{g} \,\mathrm{d}\mu$. Alors la norme associée à cette forme est la norme $\|\cdot\|_2$ et L^2 est un espace de Hilbert.*

Théorème 23 (projection orthogonale)**.** *Soit F un s.e.v. fermé de L^2. Alors pour tout $f \in \mathrm{L}^2$, il existe un unique $\pi_F(f) \in F$ qui réalise la distance de f à F. L'élément $\pi_F(f)$ est l'unique élément de F qui vérifie $f - \pi_F(f) \perp F$. De plus, l'application $\pi_F : \mathrm{L}^2 \to F$ est linéaire, continue et surjective. Enfin, on a la décomposition $\mathrm{L}^2 = F \oplus F^\perp$.*

Application 24 (espérance conditionnelle L^2)**.** Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité et soit $\mathscr{F}$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$. Alors pour tout $X \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{A})$, on appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathscr{F}$ la projection orthogonale de X sur $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{F})$. Cette projection est notée $\mathbf{E}[X \mid \mathscr{F}]$.

Théorème 25 (représentation de Riesz)**.** *Soit $\Phi : \mathrm{L}^2 \to \mathbf{C}$ une forme linéaire continue. Alors il existe une unique fonction $g \in \mathrm{L}^2$ telle que :*

$$\forall f \in \mathrm{L}^2,\ \Phi(f) = \int_X f \overline{g} \,\mathrm{d}\mu$$

Définition 26. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $\rho : I \to \mathbf{R}_+$ mesurable. On dit que ρ est une fonction poids si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x) \,\mathrm{d}x$ est fini. On note $\mathrm{L}^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport la mesure de Lebesgue.
Muni du produit scalaire $\langle f \mid g \rangle_\rho = \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) \,\mathrm{d}x$, c'est un espace de Hilbert.

Théorème 27. *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et ρ une fonction poids. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I \mathrm{e}^{\alpha|x|} \rho(x) \,\mathrm{d}x$ est fini. Alors l'ensemble des polynômes est dense dans $\mathrm{L}^2(I, \rho)$.*

Corollaire 28. *Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg P_n = n$, obtenue par le procédé de Gram–Schmidt appliqué à la base canonique de $\mathbf{C}[X]$. Sous les hypothèses du théorème précédent, cette famille est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I,\rho)$.*

Exemple 29. Pour $I = \mathbf{R}$ et $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, les polynômes orthogonaux associés sont appelés les polynômes de Hermite, notés $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$. C'est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I,\rho)$. La famille $(H_n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}})$ est alors une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ (une fois normalisée).

4 L'espace $\mathrm{L}^p_{2\pi}$

On note $e_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ et on munit $\mathrm{L}^2_{2\pi}$ du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$.

Définition 30. Pour $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$, on note $\mathrm{c}_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$ son n–ième coefficient de Fourier.

Définition 31. On appelle noyau de Dirichlet la fonction $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$.
On appelle noyau de Fejér la fonction $K_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n$.
Si $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$, on note $\sigma_N f = K_N * f$.

Lemme 32. *Soit $p \in [1,\infty[$, alors pour tout $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$, l'application $a \in \mathbf{R} \mapsto \tau_a f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$ est uniformément continue.*

Proposition 33. *La suite (K_N) est une approximation de l'unité dans $\mathrm{L}^p_{2\pi}$.*

Théorème 34 (Fejér)**.**

1. *Si f est continue, alors $\sigma_N f$ converge uniformément vers f.*
2. *Si $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$ avec $p \in [1,\infty[$, alors $\sigma_N f$ converge vers f dans $\mathrm{L}^p_{2\pi}$.*

Corollaire 35. *La famille $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2_{2\pi}$.*

Corollaire 36 (Parseval)**.** *Si $f \in \mathrm{L}^2_{2\pi}$, alors $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |\mathrm{c}_n(f)|^2$.*

Corollaire 37. *L'application qui à $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$ associe ses coefficients de Fourier est injective.*

Développements

1. L^p est complet. **[10]**
2. Théorème de Fejér. **[34]**

Références

— Beck, Malick et Peyré, *Objectif agrégation.*
— Brezis, *Analyse fonctionnelle.*
— Briane et Pagès, *Analyse – Théorie de l'intégration.*
— Hirsch et Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle.*