Leçon 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

1 Différentielle et dérivées

Définition 1. Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^m$. On dit que f est différentiable au point $a \in U$ s'il existe une application linéaire $\mathrm{d}f(a) \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ telle que pour $h \to 0$:

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a).h + \mathrm{o}(\|h\|)$$

Cette application est alors unique. On dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U.

Proposition 2.

1. *Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.*
2. *Si f, g sont différentiables en a et si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\lambda f + g$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(\lambda f + g)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a)$.*
3. *Si f est différentiable en a et si g est différentiable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g\big(f(a)\big) \circ \mathrm{d}f(a)$.*

Exemple 3.

1. Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dérivable au point a, alors f est différentiable au point a et $\mathrm{d}f(a).h = f'(a)h$.
2. Soit $N(x) = \|x\|$ la norme euclidienne, alors $\mathrm{d}N(x).h = \frac{x}{\|x\|} \cdot h$.
3. L'application det est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{d}(\det)(A).H = \mathrm{Tr}({}^t\!AH)$.

Définition 4. Soient $h \in \mathbf{R}^n$ et $a \in U$, on dit que f admet une dérivée directionnelle au point a selon le vecteur h si la fonction $t \mapsto f(a+th)$ est dérivable en 0. Cette dérivée est notée $\frac{\partial f}{\partial h}(a)$. Si $h = e_i$ vecteur de la base canonique, on parle de dérivée partielle et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Proposition 5. *Si f est différentiable en a, alors pour tout $h \in \mathbf{R}^n$, f admet une dérivée directionnelle au point a selon le vecteur h, et $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \mathrm{d}f(a).h$. En particulier :*

$$\mathrm{d}f(a).h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$$

Définition 6. Si f est différentiable en a, on appelle matrice jacobienne de f au point a la matrice $\mathrm{J}_f(a) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]_{i,j} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$. C'est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^m$ et $\mathbf{R}^n$.
Si f est à valeurs réelles, si $\mathbf{R}^n$ est muni d'un produit scalaire, on appelle gradient de f au point a, noté $\nabla f(a)$, le vecteur représentant la forme linéaire $\mathrm{d}f(a)$.

Exemple 7. la fonction f définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Théorème 8 (inégalité des accroissements finis)**.** *Soit $[a,b]$ un segment contenu dans U. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $|||\mathrm{d}f(x)||| \leqslant M$. Alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M\|b-a\|$.*

Définition 9. On dit que f est continument différentiable sur U, ou de classe C^1 sur U, si f est différentiable en tout point de U et si $x \mapsto \mathrm{d}f(x)$ est continue de U dans $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.

Théorème 10. *L'application f est de classe C^1 sur U ssi les dérivées partielles de f existent en tout point de U et sont continues.*

2 Théorème d'inversion locale et conséquences

Définition 11. Soient U et V deux ouverts de $\mathbf{R}^n$. On dit que $f : U \to V$ est un difféomorphisme si f est C^1, f est bijective et f^{-1} est C^1.

Théorème 12 (inversion locale)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^n$ de classe C^1. Soit $a \in U$ tel que $\mathrm{d}f(a)$ est inversible, alors il existe V un voisinage ouvert de a dans $\mathbf{R}^n$ et W un voisinage ouvert de $f(a)$ dans $\mathbf{R}^n$ tels que $f_{|V} : V \to W$ soit un difféomorphisme. De plus, $\mathrm{d}f^{-1}\big(f(x)\big) = \mathrm{d}f(x)^{-1}$.*

Application 13. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une application C^1 telle que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\mathrm{d}f(x) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$. Alors f est une isométrie affine.

Théorème 14 (fonctions implicites)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ et $f : U \to \mathbf{R}^m$ de classe C^1. Soient $(a,b) \in U$ et $c = f(a,b)$. On suppose que la différentielle de $y \mapsto f(a,y)$ est inversible au point b. Alors il existe V un voisinage ouvert de a dans $\mathbf{R}^n$, W un voisinage ouvert de b dans $\mathbf{R}^m$ et $\varphi : V \to W$ de classe C^1 telle que :*

$$\forall x \in V,\ \forall y \in W,\ f(x,y) = c \iff y = \varphi(x)$$

Exemple 15. Soit $P_0 \in \mathbf{R}_n[X]$ et $x_0 \in \mathbf{R}$ une racine simple de P_0. Alors il existe V un voisinage ouvert de P_0 dans $\mathbf{R}_n[X]$, W un voisinage de x_0 dans $\mathbf{R}$ et $\varphi : V \to W$ de classe C^1 tels que pour tous $x \in W$ et $P \in U$, $x = \varphi(P) \iff P(x) = 0$.

Définition 16. Soit M une partie de $\mathbf{R}^n$. Soient $m \in M$ et $d \in \mathbf{N}^*$, on dit que M est lisse en m de dimension d s'il existe φ un difféomorphisme d'un voisinage ouvert V de m dans $\mathbf{R}^n$ sur le voisinage $\varphi(V)$ de 0 dans $\mathbf{R}^n$ qui transforme M en un s.e.v. de dimension d :

$$\varphi(M \cap V) = F \cap \varphi(V)$$

avec F un s.e.v. de $\mathbf{R}^n$ de dimension d. On dit que M est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d si M est lisse de dimension d en tout point.

Définition 17. Soient M une partie de $\mathbf{R}^n$ et $m \in M$. Un vecteur v de $\mathbf{R}^n$ est dit tangent en m à M s'il existe un chemin dérivable $\gamma : I \to M$ où I intervalle ouvert contenant 0 tel que $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$.

Proposition 18. *Si M est lisse en m de dimension d, alors l'ensemble de ses vecteurs tangents en m est un s.e.v. de $\mathbf{R}^n$ de dimension d appelé espace vectoriel tangent à M en m. On le note $\mathrm{T}_m M$.*

Théorème 19 (sous-variétés)**.** *Soient M une partie de $\mathbf{R}^n$, $m \in M$ et $d \in \mathbf{N}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *M est lisse en m de dimension d.*
2. *Il existe un voisinage ouvert U de m dans $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^{n-d}$ de classe C^1 telle que $\mathrm{d}f(a)$ est surjective et :*

$$x \in M \cap U \iff x \in U \text{ et } f(x) = 0$$

   L'espace tangent en m est alors $\mathrm{T}_m M = \ker \mathrm{d}f(m)$.
3. *Il existe un voisinage ouvert U de m dans $\mathbf{R}^n$, un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbf{R}^d$ et $\varphi : \Omega \to \mathbf{R}^n$ de classe C^1 telle que φ soit un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$, $\varphi(0) = a$ et $\mathrm{d}f(0)$ injective.*
   L'espace tangent en m est alors $\mathrm{T}_m M = \mathrm{Im}\, \mathrm{d}\varphi(0)$.

Exemple 20. On se place dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

1. $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est une sous-variété de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension $n^2 - 1$. Son espace tangent en l'identité est l'ensemble des matrices de trace nulle.
2. $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est une sous-variétés de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Son espace tangent en l'identité est l'ensemble des matrices antisymétriques.

3 Différentielle seconde

Définition 21. On dit que f est deux fois différentiable en a si l'application $x \mapsto \mathrm{d}f(x)$ est différentiable en a. L'application $\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a) \in \mathscr{L}\big(\mathbf{R}^n, \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)\big)$ s'identifie alors à une application bilinéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$, notée $\mathrm{d}^2 f(a)$, appelée différentielle seconde de f en a.
On dit que f est de classe C^2 si $x \mapsto \mathrm{d}f(x)$ est de classe C^1.

Proposition 22. *Si f est deux fois différentiable en a alors $\mathrm{d}^2 f(a)(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \mathrm{d}^2 f(a)(e_j, e_i)$.*

On supposera dans la suite que $m = 1$.

Définition 23. Si f est deux fois différentiable en a, on note $\mathrm{H}_f(a) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]_{i,j}$ la matrice hessienne de f au point a. C'est la matrice de la forme bilinéaire $\mathrm{d}^2 f(a)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Application 24. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $f : U \to \mathbf{C}$ holomorphe. Soit $\Gamma : [0,1]^2 \to U$ de classe C^2 et notons $\gamma_s(t) = \Gamma(s,t)$. Si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

1. pour tout $s \in [0,1]$, $\gamma_s(0) = a$ et $\gamma_s(1) = b$ avec $a, b \in U$;
2. pour tout $s \in [0,1]$, γ_s est un lacet ;

alors $s \mapsto \int_{\gamma_s} f(z)\,\mathrm{d}z$ est constante.

Proposition 25 (formules de Taylor)**.**

1. *Si f est deux fois différentiable en a, alors :*

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a).h + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a)(h,h) + \mathrm{o}(\|h\|^2)$$

2. *Si f est de classe C^2 sur U et si le segment $[a, a+h]$ est contenu dans U, alors :*

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a).h + \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}^2 f(a+th)(h,h)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 26. *Soit A_0 une matrice symétrique inversible. Alors il existe une application $\varphi : A \mapsto M = \varphi(A)$ de classe C^1 définie sur un voisinage V de A_0 dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ et à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que :*

$$\forall A \in V,\ A = {}^tMA_0M$$

Lemme 27 (Morse)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ contenant 0 et soit $f : U \to \mathbf{R}$ de classe C^3. On suppose que 0 est un point critique non dégénéré de f : $\mathrm{d}f(0) = 0$ et $\mathrm{d}^2f(0)$ est une forme quadratique non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors il existe φ un difféomorphisme entre deux voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et :*

$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \cdots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \cdots - \varphi_n(x)^2$$

Application 28. Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$ où f est de classe C^3 au voisinage de $a \in \mathbf{R}^2$. On suppose que $\mathrm{d}^2f(a)$ est non dégénérée. Posons $\delta(h) = f(a+h) - \big(f(a) + \mathrm{d}f(a).h\big)$ la différence d'altitude entre S et son plan affine tangent en a.

- Si $\mathrm{d}^2f(a)$ est de signature $(2,0)$, alors $\delta(h) > 0$ pour tout $h \neq 0$ dans un voisinage de 0. Ainsi S est au-dessus de P dans un voisinage de $\big(a, f(a)\big)$.
- Si $\mathrm{d}^2f(a)$ est de signature $(0,2)$, alors $\delta(h) < 0$ pour tout $h \neq 0$ dans un voisinage de 0. Ainsi S est en-dessous de P dans un voisinage de $\big(a, f(a)\big)$.
- Si $\mathrm{d}^2f(a)$ est de signature $(1,1)$, alors $\delta(h) = u(h)^2 - v(h)^2$ au voisinage de 0 et S traverse son plan tangent en a selon une courbe admettant un point double en $\big(a, f(a)\big)$.

4 Optimisation

Définition 29. On dit que a est un point critique de f si $\mathrm{d}f(a)$ est nulle.

Proposition 30. *Si f admet un extremum local en a, alors a est un point critique de f.*

Proposition 31. *Soit a un point critique de f.*

1. *Si a est un maximum local (resp. minimum local) de f, alors $\mathrm{d}^2f(a)$ est négative (resp. positive).*
2. *Si $\mathrm{d}^2f(a)$ est définie négative (resp. définie positive), alors a est un maximum local (resp. minimum local) de f.*

Exemple 32.

1. $f(x, y) = x^2 - y^3$, la hessienne en $(0,0)$ est positive mais ce n'est pas un minimum.
2. $f(x) = x^2 + y^4$ a un minimum en $(0,0)$ mais la hessienne en ce point n'est pas définie positive.

Théorème 33 (Extrema liés)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et soient $f, g_1, \ldots, g_p$ des fonctions de classe C^1 de U dans $\mathbf{R}$. On considère l'ensemble :*

$$M = \{x \in U \mid g_1(x) = \cdots = g_p(x) = 0\}$$

Soit $m \in M$, on suppose que $\mathrm{d}g_1(m), \ldots, \mathrm{d}g_p(m)$ sont linéairement indépendantes. Si m est un extremum local de f sur M, alors il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $\mathrm{d}f(m) = \lambda_1\mathrm{d}g_1(m) + \cdots + \lambda_p\mathrm{d}g_p(m)$.

Application 34 (théorème spectral)**.** Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour u.

Développements

1. Applications dont la différentielle est une isométrie. **[13]**
2. Lemme de Morse. **[27]**

Références

- AVEZ, *Calcul différentiel.*
- BECK, MALICK et PEYRÉ, *Objectif agrégation.*
- GOURDON, *Les maths en tête.*
- ROUVIÈRE, *Petit guide de calcul différentiel.*