# Leçon 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

## 1 Théorème d'inversion locale

**Définition 1.** Soient $U$ et $V$ deux ouverts de $\mathbf{R}^n$. On dit que $f : U \to V$ est un $C^k$–difféomorphisme si $f$ est $C^k$, $f$ est bijective et $f^{-1}$ est $C^k$.

**Exemple 2.**

1. Dans $\mathbf{R}^2$, $U = \mathbf{R}_+^* \times ]-\pi,\pi[$ et $V = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leqslant 0\}$. L'application $g : U \to V$ définie par $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un $C^\infty$–difféomorphisme.
2. La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est dérivable, bijective mais n'est pas un difféomorphisme.

**Théorème 3** (inversion locale)**.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^n$ de classe $C^1$. Soit $a \in U$ tel que $\mathrm{d}f(a)$ est inversible, alors il existe $V$ un voisinage ouvert de $a$ dans $\mathbf{R}^n$ et $W$ un voisinage ouvert de $f(a)$ dans $\mathbf{R}^n$ tels que $f_{|V} : V \to W$ soit un $C^1$–difféomorphisme. De plus, $\mathrm{d}f^{-1}\big(f(x)\big) = \mathrm{d}f(x)^{-1}$.*

*Remarque* 4. On peut remplacer $C^1$ par $C^k$.

**Corollaire 5.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^n$ de classe $C^1$. On suppose que pour tout $x \in U$, $\mathrm{d}f(x)$ est inversible. Alors $f$ est une application ouverte : pour tout $\Omega$ ouvert de $U$, $f(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$.*

**Exemple 6.** L'hypothèse $C^1$ est nécessaire : $f(x) = x + x^2\sin(\frac{\pi}{x})$ prolongée par 0 en 0 ; alors $f$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, $f'(0) \neq 0$ mais $f$ n'est inversible sur aucun voisinage de 0.

**Application 7.** Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ de classe $C^1$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\mathrm{d}f(x)$ est une isométrie. Alors $f$ est une isométrie affine.

**Exemple 8.** Sur $\mathbf{C}^*$, $f(z) = z^2$ est un difféomorphisme local en tout point mais n'est pas un difféomorphisme global (pas injective).

**Théorème 9** (inversion globale)**.** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et soit $f : U \to \mathbf{R}^n$ de classe $C^1$. On suppose que $f$ est injective sur $U$ et que pour tout $x \in U$, $\mathrm{d}f(x)$ est inversible. Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f$ est un $C^1$–difféomorphisme global de $U$ sur $f(U)$.*

## 2 Le cas holomorphe

**Théorème 10.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in U$ tel que $f'(z_0) \neq 0$, alors il existe $V$ un voisinage de $z_0$ dans $U$ et $W$ un voisinage de $f(z_0)$ dans $\mathbf{C}$ tels que $f_{|V} : V \to W$ soit un biholomorphisme.*

**Proposition 11.** *Soient $U$ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $f : U \to \mathbf{C}$ holomorphe non constante. Alors $f$ est une application ouverte.*

**Corollaire 12** (D'Alembert–Gauss)**.** *Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ non constant. Alors la fonction $z \mapsto P(z)$ admet un zéro dans $\mathbf{C}$.*

**Théorème 13.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Si $f$ est injective sur $U$, alors $f$ est un biholomorphisme de $U$ sur $f(U)$.*

## 3 Théorème des fonctions implicites et théorème du rang constant

**Théorème 14** (fonctions implicites)**.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ et $f : U \to \mathbf{R}^m$ de classe $C^1$. Soient $(a,b) \in U$ et $c = f(a,b)$. On suppose que la différentielle de $y \mapsto f(a,y)$ est inversible au point $b$. Alors il existe $V$ un* *voisinage ouvert de $a$ dans $\mathbf{R}^n$, $W$ un voisinage ouvert de $b$ dans $\mathbf{R}^m$ et $\varphi : V \to W$ de classe $\mathrm{C}^1$ telle que :*

$$\forall x \in V,\ \forall y \in W,\ f(x,y) = c \iff y = \varphi(x)$$

**Exemple 15.** Soit $P_0 \in \mathbf{R}_n[X]$ et $x_0 \in \mathbf{R}$ une racine simple de $P_0$. Alors il existe $V$ un voisinage ouvert de $P_0$ dans $\mathbf{R}_n[X]$, $W$ un voisinage de $x_0$ dans $\mathbf{R}$ et $\varphi : V \to W$ de classe $\mathrm{C}^\infty$ tels que pour tous $x \in W$ et $P \in U$, $x = \varphi(P) \iff P(x) = 0$.

**Définition 16.** Soient $U$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^m$ de classe $\mathrm{C}^1$. Soit $a \in U$, alors :

1. si $\mathrm{d}f(a)$ est surjective, on dit que $f$ est une *submersion* en $a$ (en particulier, $n \geqslant m$).
2. si $\mathrm{d}f(a)$ est injective, on dit que $f$ est une *immersion* en $a$ (en particulier, $n \leqslant m$).

**Proposition 17.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^m$ de classe $\mathrm{C}^1$. Soit $a \in U$, alors :*

1. *si $f$ est une submersion en $a$, il existe $\varphi$ un difféomorphisme local au voisinage de $a$ tel que $f = \pi \circ \varphi$ où $\pi$ est la projection canonique de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^m$.* `[faire un schéma]`
2. *si $f$ est un immersion en $a$, il existe $\psi$ un difféomorphisme local au voisinage de $f(a)$ tel que $f = \psi^{-1} \circ j$ où $j$ est l'injection canonique de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$.* `[faire un schéma]`

**Théorème 18** (rang constant)**.** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^m$ de classe $\mathrm{C}^1$. On suppose que pour tout $x \in U$, la différentielle $\mathrm{d}f(x)$ est de rang constant $r$. Si $a \in U$, alors il existe $\varphi$ un difféomorphisme local au voisinage de $a$ et $\psi$ un difféomorphisme local au voisinage de $f(a)$ tel que $f = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ où $g$ est l'application linéaire $g(u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots, u_r, 0, \ldots, 0)$.*

# 4 Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$

**Définition 19.** Soit $M$ une partie de $\mathbf{R}^n$. Soient $m \in M$ et $d \in \mathbf{N}^*$, on dit que $M$ est lisse en $m$ de dimension $d$ s'il existe $\varphi$ un $\mathrm{C}^1$–difféomorphisme d'un voisinage ouvert $V$ de $m$ dans $\mathbf{R}^n$ sur le voisinage $\varphi(V)$ de 0 dans $\mathbf{R}^n$ qui transforme $M$ en un s.e.v. de dimension $d$ :

$$\varphi(M \cap V) = F \cap \varphi(V)$$

avec $F$ un s.e.v. de $\mathbf{R}^n$ de dimension $d$. On dit que $M$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension $d$ si $M$ est lisse de dimension $d$ en tout point.

**Définition 20.** Soient $M$ une partie de $\mathbf{R}^n$ et $m \in M$. Un vecteur $v$ de $\mathbf{R}^n$ est dit tangent en $m$ à $M$ s'il existe un chemin dérivable $\gamma : I \to M$ où $I$ intervalle ouvert contenant 0 tel que $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$.

**Proposition 21.** *Si $M$ est lisse en $m$ de dimension $d$, alors l'ensemble de ses vecteurs tangents en $m$ est un s.e.v. de $\mathbf{R}^n$ de dimension $d$ appelé espace vectoriel tangent à $M$ en $m$. On le note $\mathrm{T}_m M$.*

**Théorème 22** (sous-variétés)**.** *Soient $M$ une partie de $\mathbf{R}^n$, $m \in M$ et $d \in \mathbf{N}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$M$ est lisse en $m$ de dimension $d$.*
2. *Il existe un voisinage ouvert $U$ de $m$ dans $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^{n-d}$ une submersion en $a$ telle que :*

   $$x \in M \cap U \iff x \in U \text{ et } f(x) = 0$$

   *L'espace tangent en $m$ est alors $\mathrm{T}_m M = \ker \mathrm{d}f(m)$.*
3. *Il existe un voisinage ouvert $U$ de $m$ dans $\mathbf{R}^n$, un voisinage ouvert $\Omega$ de $0$ dans $\mathbf{R}^d$ et $\varphi : \Omega \to \mathbf{R}^n$ une immersion en $0$ telle que $\varphi$ soit un homéomorphisme de $\Omega$ sur $U \cap M$ et $\varphi(0) = a$.*
   *L'espace tangent en $m$ est alors $\mathrm{T}_m M = \mathrm{Im}\, \mathrm{d}\varphi(0)$.*

**Exemple 23.** Dans $\mathbf{R}^n$, on définit $\mathbf{S}^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$. Alors $\mathbf{S}^{n-1}$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension $n-1$. L'espace vectoriel tangent en un point $x \in \mathbf{S}^{n-1}$ est alors $x^\perp$.

**Exemple 24.** On se place dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

1. $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est une sous-variété de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension $n^2-1$. Son espace tangent en l'identité est l'ensemble des matrices de trace nulle.
2. $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est une sous-variétés de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Son espace tangent en l'identité est l'ensemble des matrices antisymétriques.

**Théorème 25** (Extrema liés)**.** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et soient $f, g_1, \ldots, g_p$ des fonctions de classe $\mathrm{C}^1$ de $U$ dans $\mathbf{R}$. On considère l'ensemble :*

$$M = \{x \in U \mid g_1(x) = \cdots = g_p(x) = 0\}$$

*Soit $m \in M$, on suppose que $\mathrm{d}g_1(m), \ldots, \mathrm{d}g_p(m)$ sont linéairement indépendantes. Si $m$ est un extremum local de $f$ sur $M$, alors il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $\mathrm{d}f(m) = \lambda_1 \mathrm{d}g_1(m) + \cdots + \lambda_p \mathrm{d}g_p(m)$.*

**Application 26** (théorème spectral)**.** Soit $u$ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour $u$.

## 5 Lemme de Morse

**Proposition 27.** *Soit $A_0$ une matrice symétrique inversible. Alors il existe une application $\varphi : A \mapsto M = \varphi(A)$ de classe $\mathrm{C}^1$ définie sur un voisinage $V$ de $A_0$ dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ et à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que :*

$$\forall A \in V,\ A = {}^t M A_0 M$$

**Lemme 28** (Morse)**.** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$ contenant $0$ et soit $f : U \to \mathbf{R}$ de classe $\mathrm{C}^3$. On suppose que $0$ est un point critique non dégénéré de $f$ : $\mathrm{d}f(0) = 0$ et $\mathrm{d}^2 f(0)$ est une forme quadratique non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors il existe $\varphi$ un $\mathrm{C}^1$–difféomorphisme entre deux voisinage de $0$ dans $\mathbf{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et :*

$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \cdots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \cdots - \varphi_n(x)^2$$

**Application 29.** Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$ où $f$ est de classe $\mathrm{C}^3$ au voisinage de $a \in \mathbf{R}^2$. On suppose que $\mathrm{d}^2 f(a)$ est non dégénérée. Posons $\delta(h) = f(a+h) - \big(f(a) + \mathrm{d}f(a).h\big)$ la différence d'altitude entre $S$ et son plan affine tangent en $a$.

— Si $\mathrm{d}^2 f(a)$ est de signature $(2,0)$, alors $\delta(h) > 0$ pour tout $h \neq 0$ dans un voisinage de 0. Ainsi $S$ est au-dessus de $P$ dans un voisinage de $\big(a, f(a)\big)$.

— Si $\mathrm{d}^2 f(a)$ est de signature $(0,2)$, alors $\delta(h) < 0$ pour tout $h \neq 0$ dans un voisinage de 0. Ainsi $S$ est en-dessous de $P$ dans un voisinage de $\big(a, f(a)\big)$.

— Si $\mathrm{d}^2 f(a)$ est de signature $(1,1)$, alors $\delta(h) = u(h)^2 - v(h)^2$ au voisinage de 0 et $S$ traverse son plan tangent en $a$ selon une courbe admettant un point double en $\big(a, f(a)\big)$.

## Développements

1. Théorème des extrema liés. **[25]**
2. Lemme de Morse. **[28]**

## Références


— AVEZ, *Calcul différentiel.*
— BECK, MALICK et PEYRÉ, *Objectif agrégation.*
— GOURDON, *Les maths en tête.*
— ROUVIÈRE, *Petit guide de calcul différentiel.*