Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

1 Définitions

Définition 1. On appelle espace pré-hilbertien un **C**–e.v. H muni d'une forme sesquilinéaire $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$, c'est-à-dire une application de $H\times H$ dans **C** qui vérifie :

1. $\forall y\in H$, $\langle\cdot\mid y\rangle$ est linéaire.
2. $\forall x,y\in H$, $\langle y\mid x\rangle=\overline{\langle x\mid y\rangle}$.
3. $\forall x\in H$, $\langle x\mid x\rangle\geqslant 0$.
4. $\forall x\in H$, $\langle x\mid x\rangle=0 \iff x=0$.

On note $\|x\|=\sqrt{\langle x\mid x\rangle}$.

Proposition 2 (Cauchy–Schwarz)**.** $\forall x,y\in H$, $|\langle x\mid y\rangle|\leqslant\|x\|\|y\|$ *avec égalité ssi x et y sont liés.*

Corollaire 3 (Minkowski)**.** $\forall x,y\in H$, $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ *avec égalité ssi x et y sont positivement liés. L'application $\|\cdot\|$ est une norme sur H.*

Proposition 4. *Pour tout $y\in H$, l'application $\varphi_y=\langle\cdot\mid y\rangle$ est une forme linéaire continue sur H. De plus, $|||\varphi_y|||=\|y\|$.*

Définition 5. On dit que H est un espace de Hilbert s'il est complet pour $\|\cdot\|$.

Proposition 6 (identité du parallélogramme)**.**

$$\forall x,y\in H,\ \|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\big(\|x\|^2+\|y\|^2\big)$$

Exemple 7.

1. Les espaces hermitiens sont des espaces de Hilbert.
2. L'espace $\ell^2(\mathbf{N})$ est un espace de Hilbert pour $\langle u\mid v\rangle=\sum_{n\in\mathbf{N}}u_n\overline{v_n}$.
3. L'espace $\mathrm{L}^2(X,\mathscr{A},\mu)$ est un espace de Hilbert pour $\langle f\mid g\rangle=\int_X f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$.

Définition 8. On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x\mid y\rangle=0$.

Théorème 9 (Pythagore)**.** *Si x et y sont orthogonaux alors $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.*

Définition 10. Soit A une partie de H, on note $A^\perp$ l'ensemble des éléments de H qui sont orthogonaux à tous les éléments de A.

Proposition 11. *Soit A une partie de H pré-hilbertien.*

1. *$A^\perp$ est un s.e.v. fermé de H.*
2. *$A^\perp=\overline{\mathrm{Vect(A)}}^\perp$.*
3. *$\overline{\mathrm{Vect}(A)}\subseteq A^{\perp\perp}$.*

2 Le théorème de projection

Théorème 12 (projection sur un convexe fermé)**.** *Soit H un espace de Hilbert et soit C un convexe fermé non vide de H. Alors pour tout $x\in H$ il existe un unique $\pi_C(x)\in C$ qui réalise la distance de x à C. De plus, $\pi_C(x)$ est l'unique élément de C vérifiant $\Re\langle x-\pi_C(x)\mid y-\pi_C(x)\rangle\leqslant 0$ pour tout $y\in C$.*

Corollaire 13. *Soit H un espace de Hilbert et F un s.e.v. fermé de H. Pour $x\in H$, le projeté $\pi_F(x)$ est l'unique élément de F vérifiant $x-\pi_F(x)\in F^\perp$. De plus, l'application $\pi_F:H\to F$ est linéaire, continue et surjective. Enfin on a la décomposition $H=F\oplus F^\perp$.*

Proposition 14. *Soit H un espace de Hilbert et soit A une partie de H, alors $\overline{\mathrm{Vect}(A)}=A^{\perp\perp}$.*

Corollaire 15. *Un s.e.v. F de H est dense ssi son orthogonal est réduit à $\{0\}$.*

Application 16 (espérance conditionnelle L^2)**.** Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité et soit $\mathscr{F}$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$. Alors pour tout $X \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{A})$, on appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathscr{F}$ la projection orthogonale de X sur $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{F})$. Cette projection est notée $\mathbf{E}[X \mid \mathscr{F}]$.

Théorème 17 (représentation de Riesz)**.** *Soit H un espace de Hilbert. L'application $\Phi : H \to H'$ définie par $\Phi(y) = \langle \cdot \mid y \rangle$ est une isométrie surjective.*

Corollaire 18. *Soit T un endomorphisme continue de H. Alors il existe un unique endomorphisme continue noté T^* qui vérifie $\langle Tx \mid y \rangle = \langle x \mid T^* y \rangle$ pour tous éléments $x, y \in H$. De plus, $\|\!| T |\!\|= \|\!| T^* |\!\|$.*

3 Bases hilbertiennes

Définition 19. Soit H un espace de Hilbert. On dit que $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de H si :

1. $\langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{i,j}$ (famille orthonormée) ;
2. $\mathrm{Vect}(e_i,\ i \in I)$ est dense dans H.

Proposition 20 (Gram–Schmidt)**.** *Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une famille de H. Alors il existe une unique famille orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbf{N}$,* $\mathrm{Vect}(f_0, \dots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_k)$.

Corollaire 21. *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable.*

Proposition 22. *Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une famille orthonormée. On note $F = \overline{\mathrm{Vect}(e_n,\ n \in \mathbf{N})}$. Alors :*

1. $\pi_F(x) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \langle x \mid e_n \rangle e_n$;
2. $\|x\|^2 = \|x - \pi_F(x)\|^2 + \sum_{n \in \mathbf{N}} |\langle x \mid e_n \rangle|^2$.

Théorème 23. *Soit H un espace de Hilbert séparable. Soit $(e_n)_{n \in N}$ une famille de H, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *$(e_n)_{n \in N}$ est une base hilbertienne de H.*
2. *$\forall x \in H$, $x = \sum_{n \in \mathbf{N}} \langle x \mid e_n \rangle e_n$ dans H.*
3. *$\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbf{N}} |\langle x \mid e_n \rangle|^2$.*
4. $\mathrm{Vect}(e_n,\ n \in \mathbf{N})^{\perp} = \{0\}$.

Exemple 24. La famille $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $e_n(k) = \delta_{n,k}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbf{N})$.

Corollaire 25. *Si H est un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une base hilbertienne, alors l'application :*

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \ell^2(\mathbf{N}) \\ x & \longmapsto & \big(\langle x \mid e_n \rangle\big)_{n \in \mathbf{N}} \end{array}$$

est une isométrie bijective.

4 Les espaces L^2 à poids

Définition 26. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $\rho : I \to \mathbf{R}_+$ mesurable. On dit que ρ est une fonction poids si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x$ est fini. On note $\mathrm{L}^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport la mesure de Lebesgue.
Muni du produit scalaire $\langle f \mid g \rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,\mathrm{d}x$, c'est un espace de Hilbert.

Théorème 27. *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et ρ une fonction poids. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I \mathrm{e}^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x$ est fini. Alors l'ensemble des polynômes est dense dans $\mathrm{L}^2(I, \rho)$.*

Corollaire 28. *Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg P_n = n$, obtenue par le procédé de Gram–Schmidt appliqué à la base canonique de $\mathbf{C}[X]$. Sous les hypothèses du théorème précédent, cette famille est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I, \rho)$.*

Exemple 29. Pour $I = \mathbf{R}$ et $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, les polynômes orthogonaux associés sont appelés les polynômes de Hermite, notés $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$. C'est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I,\rho)$. La famille $(H_n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}})$ est alors une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ (une fois normalisée).

5 Séries de Fourier

Définition 30. On note $\mathrm{L}^2_{2\pi}$ l'espace des fonctions 2π–périodiques de carré intégrable sur $[0,2\pi]$. On le munit du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$. C'est un espace de Hilbert.

Définition 31. On note $e_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$. Si f est une fonction de $\mathrm{L}^2_{2\pi}$, on note $\mathrm{c}_n(f) = \langle f \mid e_n\rangle$ son n–ième coefficient de Fourier et $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{c}_n(f)e_n$ sa N–ième somme partielle de Fourier.

Remarque 32. $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur le s.e.v. fermé $\mathrm{Vect}(e_n,\ |n| \leqslant N)$.

Théorème 33. *La famille $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2_{2\pi}$. Autrement dit, on a la décomposition en série de Fourier dans $\mathrm{L}^2_{2\pi}$:*

$$\forall f \in \mathrm{L}^2_{2\pi},\ f = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{c}_n(f)e_n$$

Corollaire 34 (Parseval)**.** *Si $f \in \mathrm{L}^2_{2\pi}$, alors $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |\mathrm{c}_n(f)|^2$.*

Application 35. Si f est de classe C^1 et 2π–périodique, alors f est limite uniforme de sa série de Fourier.

Développements

1. Théorème de projection sur un convexe fermé. **[12]**
2. Densité des polynômes orthogonaux. **[27]**

Références

— BECK, MALICK et PEYRÉ, *Objectif agrégation.*
— BREZIS, *Analyse fonctionnelle.*
— HIRSCH et LACOMBE, *Éléments d'analyse fonctionnelle.*