Leçon 205 : Espaces complets. Exemples et applications.

1 Définition et premiers exemples

On considère (E,d) un espace métrique.

Définition 1. On dit qu'une suite (x_n) de E est de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tous $p, q \geqslant N$, $d(x_p, x_q) \leqslant \varepsilon$.

Proposition 2.

1. *Toute suite convergente est de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
3. *Si une suite de Cauchy possède une valeur d'adhérence alors elle converge vers cette valeur.*

Définition 3. On dit que l'espace (E,d) est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente.

Exemple 4.

1. $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ est complet.
2. $(\mathbf{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet.
3. $\big(\mathrm{C}([a,b],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ est complet.
4. Si X est un ensemble et (E,d) un espace complet, alors $\mathscr{B}(X,E)$ l'ensemble des applications bornées de X dans E muni de $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} d\big(f(x), g(x)\big)$ est complet.
5. Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des e.v.n. avec F complet, alors $\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E,F)$ muni de la norme subordonnée est complet.

Remarque 5. La complétude est une notion métrique, pas topologique. Par exemple sur $\mathbf{R}$, la distance $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ définit la même topologie que $|\cdot|$ mais $\mathbf{R}$ n'est pas complet pour cette distance.

Proposition 6. *Une partie complète d'un espace métrique est fermée. Une partie fermée d'un espace complet est complète.*

Proposition 7. *Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ des espaces métriques. Alors $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est complet (pour la métrique produit) ssi (E_i, d_i) est complet pour tout i.*

Théorème 8 (fermés emboités)**.** *Soit (E,d) complet et (F_n) une suite décroissante de fermés non vide dont les diamètres tendent vers 0. Alors il existe $x \in E$ tel que $\bigcap F_n = \{x\}$.*

Proposition 9. *Soit (E,d) un espace métrique. Alors E est compact ssi il est précompact et complet.*

Théorème 10. *Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques avec E' complet. Soit A une partie dense de E et soit $f : A \to E'$ une application uniformément continue. Alors il existe une unique application continue $\tilde{f} : E \to E'$ qui prolonge f. De plus, $\tilde{f}$ est uniformément continue.*

2 Point fixe et conséquences

Théorème 11. *Soit (E,d) complet et soit $f : E \to E$ une application k–lipschitzienne pour $k \in]0,1[$. Alors f admet un unique point fixe dans E.*

Remarque 12. On ne peut pas affaiblir l'hypothèse en $d\big(f(x), f(y)\big) < d(x,y)$. Par exemple, si $E = \mathbf{R}$, la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ n'a pas de point fixe.

Théorème 13 (Cauchy–Lipschitz)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbf{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Alors pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega$, le problème de Cauchy $y' = f(t,y)$ avec condition initiale $y(t_0) = y_0$ admet une unique solution maximale.*

Théorème 14 (inversion locale)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^n$ de classe C^1. Soit $a \in U$ tel que $\mathrm{d}f(a)$ est inversible, alors il existe V un voisinage ouvert de a dans $\mathbf{R}^n$ et W un voisinage ouvert de $f(a)$ dans $\mathbf{R}^n$ tels que $f_{|V} : V \to W$ soit un C^1–difféomorphisme. De plus, $\mathrm{d}f^{-1}\big(f(x)\big) = \mathrm{d}f(x)^{-1}$.*

3 Espaces de Banach

Définition 15. On appelle espace de Banach un e.v.n. complet.

Théorème 16 (Baire)**.** *Soit (E, d) un espace complet. Alors :*

1. *Tout intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*
2. *Tout union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.*

Définition 17. On appelle G_δ une intersection dénombrable d'ouverts.

Application 18. L'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables sur $[0,1]$ est dense dans $\big(\mathrm{C}([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$.

Théorème 19 (Banach–Steinhauss)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach et soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Alors :*

— *ou bien $(|\!|\!| T_i |\!|\!|)_{i\in I}$ est bornée;*
— *ou bien $\{x \in E \mid \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| = \infty\}$ est un G_δ dense.*

Corollaire 20. *Soient E et F deux espaces de Banach et (T_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F. Si pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))$ converge vers une limite $T(x)$, alors T est une application linéaire continue.*

Application 21. L'ensemble des fonctions continues périodiques dont les sommes de Fourier en 0 divergent est un G_δ dense.

Théorème 22 (application ouverte)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T : E \to F$ linéaire continue et surjective. Alors T est une application ouverte : il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}_F(0,r) \subseteq T\big(\mathrm{B}_E(0,1)\big)$.*

Corollaire 23 (isomorphisme de Banach)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T : E \to F$ linéaire continue et bijective. Alors T^{-1} est continue.*

Application 24. Soient E un e.v. muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On suppose que E est complet pour ces deux normes. S'il existe $C > 0$ tel que $\|\cdot\|_2 \leqslant C\|\cdot\|_1$, alors il existe $C' > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leqslant C'\|\cdot\|_2$.

Proposition 25. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Alors E est complet ssi toute série normalement convergente est convergente.*

Exemple 26. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach et $u \in \mathscr{L}_\mathrm{c}(E)$ un endomorphisme tel que $|\!|\!| u |\!|\!| < 1$, alors $\mathrm{id} - u$ est inversible et son inverse est donné par $\sum_{n\in\mathbf{N}} u^n \in \mathscr{L}_\mathrm{c}(E)$.

Théorème 27. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $\mathrm{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_p$. De plus, si (f_n) converge dans L^p alors on peut extraire une sous-suite qui converge μ–p.p.*

4 Espaces de Hilbert

Définition 28. On appelle espace pré-hilbertien un $\mathbf{C}$–e.v. H muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. L'application $x \mapsto \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ est alors une norme sur H. Si H est complet pour cette norme, on dit que H est un espace de Hilbert.

Exemple 29.

1. L'espace $\ell^2(\mathbf{N})$ est un espace de Hilbert pour $\langle u \mid v \rangle = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n \overline{v_n}$.
2. L'espace $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ est un espace de Hilbert pour $\langle f \mid g \rangle = \int_\mathbf{R} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$.

Théorème 30 (projection sur un convexe fermé)**.** *Soit H un espace de Hilbert et soit C un convexe fermé non vide de H. Alors pour tout $x \in H$ il existe un unique $\pi_C(x) \in C$ qui réalise la distance de x à C. De plus, $\pi_C(x)$ est l'unique élément de C vérifiant $\Re\langle x - \pi_C(x) \mid y - \pi_C(x)\rangle \leqslant 0$ pour tout $y \in C$.*

Corollaire 31. *Soit H un espace de Hilbert et F un s.e.v. fermé de H. Pour $x \in H$, le projeté $\pi_F(x)$ est l'unique élément de F vérifiant $x - \pi_F(x) \in F^\perp$. De plus, l'application $\pi_F : H \to F$ est linéaire, continue et surjective. Enfin on a la décomposition $H = F \oplus F^\perp$.*

Corollaire 32. *Un s.e.v. F de H est dense ssi son orthogonal est réduit à* $\{0\}$.

Application 33 (espérance conditionnelle L^2)**.** Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité et soit $\mathscr{F}$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$. Alors pour tout $X \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{A})$, on appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathscr{F}$ la projection orthogonale de X sur $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{F})$. Cette projection est notée $\mathbf{E}[X \mid \mathscr{F}]$.

Théorème 34 (représentation de Riesz)**.** *Soit H un espace de Hilbert. L'application $\Phi : H \to H'$ définie par $\Phi(y) = \langle \cdot \mid y\rangle$ est une isométrie surjective.*

Corollaire 35. *Soit T un endomorphisme continue de H. Alors il existe un unique endomorphisme continue noté T^* qui vérifie $\langle Tx \mid y\rangle = \langle x \mid T^* y\rangle$ pour tous éléments $x, y \in H$.*

Développements

1. Densité des fonctions continues nulle part dérivables. **[18]**
2. L^p est complet. **[27]**

Références

- BECK, MALLICK et PEYRÉ, *Objectif agrégation.*
- BREZIS, *Analyse fonctionnelle.*
- BRIANE et PAGES, *Analyse – Théorie de l'intégration.*
- GOURDON, *Les maths en tête, analyse.*
- POMMELLET, *Agrégation de mathématiques – Cours d'analyse.*