Leçon 202 : Exemples de parties denses et applications.

1 Définition et premiers exemples

Définition 1. Soit (E,d) un espace métrique et soit D une partie de E. On dit que D est dense si $\overline{D}=E$, c'est-à-dire si tout élément de E est limite d'une suite d'élément de D.

Exemple 2. $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

Application 3. Le seule automorphisme de corps de $\mathbf{R}$ est l'identité.

Proposition 4. *Soit G un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$. Alors ou bien il existe $m \geqslant 0$ tel que $G = m\mathbf{Z}$, ou bien G est dense dans $\mathbf{R}$.*

Corollaire 5. *Soient $a, b \in \mathbf{R}^*$. Alors $a\mathbf{Z}+b\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$ ssi $\frac{a}{b} \notin \mathbf{Q}$.*

Exemple 6. Les valeurs d'adhérence de la suite $(\sin n)$ sont $[-1,1]$.

Définition 7. On dit qu'un espace métrique est séparable s'il admet une partie dénombrable dense.

Proposition 8. *Les espaces métriques compacts sont séparables.*

Théorème 9. *Soit $p \in [1,+\infty[$ et soit $\mathrm{L}^p = \mathrm{L}^p(\mathbf{R},\mathscr{B}(\mathbf{R}),\lambda)$.*

1. *Les fonctions en escalier à support compact sont denses dans L^p.*
2. *Les fonctions continues à support compact sont denses dans L^p.*

Corollaire 10. *$\mathrm{L}^p(\mathbf{R})$ est séparable pour $p \in [1,+\infty[$.*

Application 11 (Riemann–Lebesgue)**.** Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$, alors $|\hat{f}(\xi)| \to 0$ lorsque $|\xi| \to +\infty$.

Théorème 12 (Baire)**.** *Soit (E,d) un espace métrique complet.*

1. *Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*
2. *Tout union dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.*

Application 13. Soit E un e.v.n. de dimension infini admettant une base dénombrable. Alors E n'est pas complet.

Exemple 14. $\mathbf{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

2 Densité dans les espaces de matrices

On considère $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Proposition 15. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ de rang r. Alors il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ tels que $A = P\,\mathrm{J}_r\,Q$ avec $\mathrm{J}_r = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Théorème 16. *$\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.*

Corollaire 17. *Il existe une base de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ formée de matrices inversibles.*

Application 18. Soit $f = \det : \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$. Alors f est différentiable et $\mathrm{d}f(M).H = \mathrm{Tr}\big({}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(M)H\big)$. On en déduit que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est une hypersurface de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et son espace tangent en I_n est l'espace des matrices de trace nulle.

Théorème 19. *L'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbf{C}$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.*

Corollaire 20. *La décomposition de Dunford $M \mapsto (D,N)$ n'est pas continue.*

Application 21 (Cayley–Hamilton)**.** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et soit χ_M son polynôme caractéristique. Alors $\chi_M(M) = 0$.

3 Approximations polynomiales

Théorème 22 (polynômes de Bernstein)**.** *Soit $f \in \mathrm{C}([0,1])$ et posons pour $n \in \mathbf{N}^*$:*

$$B_n[f](x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k},\ x \in [0,1]$$

le n–ième polynôme de Bernstein associée à f. Alors on a la majoration suivante :

$$\|B_n[f] - f\|_\infty \leqslant \frac{3}{2}\,\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Corollaire 23 (théorème d'approximation de Weierstrass)**.** *Les polynômes sont denses dans $\mathrm{C}([a,b])$.*

Corollaire 24. *L'espace $\mathrm{C}([a,b])$ est séparable.*

Application 25 (théorème des moments)**.** Soit $f : [0,1] \to \mathbf{C}$ continue telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t = 0$. Alors f est nulle.

Application 26. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ nulle part dérivables est dense dans $\mathrm{C}([0,1])$.

Définition 27. Soit $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$.

1. On définit le n–ième coefficient de Fourier de f par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$.
2. On définit la N–ième somme partielle de Fourier de f par $S_n f(t) = \sum_{|n|\leqslant N} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$.
3. On définit la N–ième somme partielle de Fejér de f par $\sigma_N f = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n f$.

Théorème 28 (Fejér)**.**

1. *Soit $f \in \mathrm{C}_{2\pi}$, alors $\sigma_N f \to f$ uniformément.*
2. *Soit $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$ avec $p \in [1,+\infty[$, alors $\sigma_N f \to f$ dans L^p.*

Corollaire 29. *Les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathrm{C}_{2\pi}$ et dans $\mathrm{L}^p_{2\pi}$.*

Corollaire 30. *L'application $f \mapsto \left(c_n(f)\right)_{n\in\mathbf{Z}}$ est injective.*

Théorème 31. *La famille $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, où $e_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$, est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2_{2\pi}$.*

Corollaire 32 (Parseval)**.** *Si $f \in \mathrm{L}^2_{2\pi}$, $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)|^2$.*

Application 33. Si $f \in \mathrm{C}^1_{2\pi}$, alors $S_N f \to f$ uniformément et dans L^2.

4 Densité dans un espace de Hilbert

Définition 34. Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien complet pour la norme issue du produit scalaire.

Théorème 35 (projection)**.** *Soit F un s.e.v. fermé d'un espace de Hilbert H. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $p_F(x) \in F$ qui réalise la distance de x à F. De plus $p_F(x)$ est caractérisé par $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \perp F$. Enfin, on a la décomposition en somme directe $H = F \oplus F^\perp$.*

Corollaire 36. *Soit F un s.e.v. de H, alors $H = \overline{F} \oplus F^\perp$. En particulier, F est dense ssi $F^\perp = \{0\}$.*

Application 37 (échantillonnage de Shannon)**.** Soit $\mathrm{BL}^2 = \{u \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}) \mid \mathscr{F}u = 0 \text{ sur } \mathbf{R} \setminus [-\pi,\pi]\}$. Alors :

1. $\mathrm{BL}^2 \subseteq \mathrm{C}_0(\mathbf{R})$.
2. BL^2 est un espace de Hilbert.
3. $\forall u \in \mathrm{BL}^2$, $u(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} u(k)\,\mathrm{sinc}(x-k)$ avec convergence uniforme et L^2 de la série.

Définition 38. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $\rho : I \to \mathbf{R}$ mesurable et strictement positive. On dit que ρ est une fonction poids si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x$ est finie. On note $\mathrm{L}^2(I,\rho)$ l'espace des fonction de carré intégrable sur I pour la mesure $\rho(x)\mathrm{d}x$.

Proposition 39. *$\mathrm{L}^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f \mid g\rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,\mathrm{d}x$.*

Théorème 40. *S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I \mathrm{e}^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x$ est finie, alors les polynômes sont denses dans $\mathrm{L}^2(I,\rho)$.*

Corollaire 41. *Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg P_n = n$, obtenue par le procédé de Gram–Schmidt appliqué à la base canonique de $\mathbf{C}[X]$. Sous les hypothèses du théorème précédent, cette famille est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I,\rho)$.*

Exemple 42. Pour $I = \mathbf{R}$ et $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, les polynômes orthogonaux associés sont appelés les polynômes de Hermite, notés $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$. C'est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I,\rho)$. La famille $(H_n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}})$ est alors une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$.

Développements

1. Densité des fonctions continues nulle part dérivables sur $[0,1]$. **[26]**
2. Densité des polynômes dans $\mathrm{L}^2(I,\rho)$. **[40]**

Références

— Beck, Malick et Peyré, *Objectif agrégation.*
— Briane et Pagès, *Analyse – Théorie de l'intégration.*
— Gourdon, *Les maths en tête, analyse.*
— Queffélec et Zuily, *Analyse pour l'agrégation.*
— Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel.*