Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

1 L'espace $\mathrm{C}\big([a,b]\big)$

Définition 1. Soit (f_n) une suite de $\mathrm{C}\big([a,b]\big)$, on dit cette suite converge uniformément si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in [a,b],\ |x-y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Proposition 2. *Si une suite (f_n) de $\mathrm{C}\big([a,b]\big)$ converge uniformément vers une fonction f, alors f est continue sur $[a,b]$.*

Proposition 3. *Sur $\mathrm{C}\big([a,b]\big)$, on définit la norme $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]}|f|$. Alors une suite converge pour cette norme ssi elle converge uniformément. L'espace $\mathrm{C}\big([a,b]\big)$ muni de cette norme est un espace de Banach.*

Théorème 4 (Heine)**.** *Les fonction continue sur $[a,b]$ sont uniformément continues.*

Théorème 5 (Dini)**.** *Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions positives sur $[a,b]$ telle que pour tout $x \in [a,b]$, la suite $\big(f_n(x)\big)$ converge vers une limite $f(x)$. Alors la suite (f_n) converge uniformément vers f, et f est continue.*

Théorème 6 (Weierstrass)**.** *Toute fonction de $\mathrm{C}\big([a,b]\big)$ est limite uniforme de fonctions polynomiales.*

Application 7. L'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ nulle part dérivables est dense dans $\mathrm{C}\big([a,b]\big)$.

2 Le théorème d'Ascoli

Dans cette partie, on considère X métrique compact et $\mathrm{C}(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_X |f|$.

Définition 8. Soit A une partie de $\mathrm{C}(X)$ et soit $x_0 \in X$. On dit que A est équicontinue en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X,\ \forall f \in A,\ d(x,x_0) \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

On dit que A est équicontinue si elle est équicontinue en tout point de X.

Lemme 9. *Soit (f_n) équicontinue dans $\mathrm{C}(X)$ et D une partie dense de X. Si la suite $\big(f_n(x)\big)$ converge pour tout $x \in D$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction $f \in \mathrm{C}(X)$.*

Théorème 10 (Ascoli)**.** *Une partie de $\mathrm{C}(X)$ est relativement compacte dans $\mathrm{C}(X)$ ssi elle est bornée et équicontinue.*

Application 11. Soit $k \in \mathrm{C}\big([0,1]\times[0,1]\big)$. On définit un opérateur T de $\mathrm{C}\big([0,1]\big)$ dans lui-même par :

$$\forall f \in \mathrm{C}\big([0,1]\big),\ \forall x \in [0,1],\ Tf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

Alors l'image par T de la boule unité fermée de $\mathrm{C}\big([0,1]\big)$ est relativement compacte dans $\mathrm{C}\big([0,1]\big)$.

3 L'espace $\mathscr{H}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$, on considère $\mathscr{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Proposition 12. *Soit (f_n) une suite de $\mathscr{H}(\Omega)$. Si (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f, alors f est holomorphe sur Ω. De plus, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la suite $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers $f^{(k)}$.*

Définition 13. On dit qu'une suite (f_n) de fonctions holomorphes sur Ω converge dans $\mathscr{H}(\Omega)$ vers f si la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers f.

Lemme 14. *Soit $K_n = \{z \in \Omega \mid |z| \leqslant n,\ \mathrm{dist}(z, \Omega^{\mathrm{c}}) \geqslant \frac{1}{n}\}$. Alors :*

1. *K_n est un compact de Ω.*
2. *$K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$.*
3. *$\Omega = \bigcup_{n \geqslant 1} K_n$.*

De plus, pour tout compact K de Ω, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $K \subseteq K_n$.

Théorème 15. *Soit $N_p(f) = \sup_{K_p} |f|$, on munit $\mathscr{H}(\Omega)$ de la distance suivante :*

$$d(f,g) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} \min\big(N_p(f-g), 1\big)$$

Alors :

1. *$\mathscr{H}(\Omega)$ est complet pour cette distance.*
2. *Une suite converge pour cette distance ssi elle converge dans $\mathscr{H}(\Omega)$.*

Théorème 16 (Montel)**.** *Soit A une partie de $\mathscr{H}(\Omega)$. Alors A est relativement compacte dans $\mathscr{H}(\Omega)$ ssi A est bornée sur tout compact de Ω.*

4 Les espaces $\mathrm{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$

Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 17. Soit $p \in [1, \infty[$, on définit l'espace $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables f telles que $\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu$ est fini. On note $\mathrm{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ le quotient de $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ par la relation d'équivalence « égalité μ–p.p. ».
On définit pour $f \in \mathrm{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ la quantité $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

Définition 18. Pour f mesurable positive, on définit la quantité $\operatorname{ess\,sup}(f) = \inf\{M > 0 \mid \mu(\{f > M\}) = 0\}$. On pose $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}(|f|)$ et on note $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables telles que $\|f\|_\infty$ est fini. On note $\mathrm{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ le quotient de $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ par la relation d'équivalence « égalité μ–p.p. ».

Proposition 19 (Hölder)**.** *Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et soient $f \in \mathrm{L}^p$ et $g \in \mathrm{L}^q$. Alors le produit fg est dans L^1 et on a $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.*

Proposition 20 (Minkowski)**.** *Soit $p \in [1, \infty]$ et soient $f, g \in \mathrm{L}^p$. Alors on a l'inégalité $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.*

Corollaire 21. *Pour tout $p \in [1, \infty]$, l'espace $\mathrm{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est un e.v.n. pour la norme $\|\cdot\|_p$.*

Proposition 22. *Si la mesure μ est finie, alors pour tous $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, on a l'inclusion $\mathrm{L}^q \subseteq \mathrm{L}^p$.*

Théorème 23. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $\mathrm{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_p$. De plus, si (f_n) converge dans L^p alors on peut extraire une sous-suite qui converge μ–p.p.*

Théorème 24. *Soit $p \in [1, \infty[$, on se place sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}), \lambda)$.*

1. *L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbf{R})$.*
2. *L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbf{R})$.*

Corollaire 25. *Pour $p \in [1, \infty[$, l'espace L^p est séparable.*

5 Le cas de L^2

Proposition 26. *Sur $\mathrm{L}^2(X, \mathscr{A}, \mu)$, on définit la forme sesquilinéaire suivante $\langle f \mid g \rangle = \int_X f \overline{g} \,\mathrm{d}\mu$. Alors la norme associée à cette forme est la norme $\|\cdot\|_2$ et L^2 est un espace de Hilbert.*

Théorème 27 (projection orthogonale)**.** *Soit F un s.e.v. fermé de* L^2*. Alors pour tout $f \in \mathrm{L}^2$, il existe un unique $\pi_F(f) \in F$ qui réalise la distance de f à F. L'élément $\pi_F(f)$ est l'unique élément de F qui vérifie $f - \pi_F(f) \perp F$. De plus, l'application $\pi_F : \mathrm{L}^2 \to F$ est linéaire, continue et surjective. Enfin, on a la décomposition* $\mathrm{L}^2 = F \oplus F^{\perp}$.

Application 28 (espérance conditionnelle L^2)**.** Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité et soit $\mathscr{F}$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$. Alors pour tout $X \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{A})$, on appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathscr{F}$ la projection orthogonale de X sur $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{F})$. Cette projection est notée $\mathbf{E}[X \mid \mathscr{F}]$.

Théorème 29 (représentation de Riesz)**.** *Soit $\Phi : \mathrm{L}^2 \to \mathbf{C}$ une forme linéaire continue. Alors il existe une unique fonction $g \in \mathrm{L}^2$ telle que :*

$$\forall f \in \mathrm{L}^2,\ \Phi(f) = \int_X f \overline{g} \, \mathrm{d}\mu$$

Définition 30. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $\rho : I \to \mathbf{R}_+$ mesurable. On dit que ρ est une fonction poids si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x) \, \mathrm{d}x$ est fini. On note $\mathrm{L}^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport la mesure de Lebesgue.
Muni du produit scalaire $\langle f \mid g \rangle_\rho = \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) \, \mathrm{d}x$, c'est un espace de Hilbert.

Théorème 31. *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et ρ une fonction poids. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I \mathrm{e}^{\alpha |x|} \rho(x) \, \mathrm{d}x$ est fini. Alors l'ensemble des polynômes est dense dans* $\mathrm{L}^2(I, \rho)$.

Corollaire 32. *Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de polynômes unitaire orthogonaux deux à deux tels que $\deg P_n = n$. Sous les hypothèses du théorème précédent, cette famille est une base hilbertienne de* $\mathrm{L}^2(I, \rho)$.

Exemple 33. Pour $I = \mathbf{R}$ et $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, les polynômes orthogonaux associés sont appelés les polynômes de Hermite, notés $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$. C'est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I, \rho)$. La famille $(H_n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}})$ est alors une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$.

Développements

1. Densité des fonctions continues nulle part dérivables. **[7]**
2. L^p est complet. **[23]**

Références

- Beck, Malick et Peyré, *Objectif agrégation.*
- Briane et Pagès, *Analyse – Théorie de l'intégration.*
- Hirsch et Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle.*
- Queffélec et Zuily, *Analyse pour l'agrégation.*