Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

On se donne $\mathbf{K}$ un corps et E un $\mathbf{K}$–espace vectoriel de dimension finie n.

1 Espace dual

Définition 1. On appelle forme linéaire sur E une application linéaire de l'espace E dans $\mathbf{K}$. L'ensemble des formes linéaires sur E est un $\mathbf{K}$–e.v. noté E^*, appelé espace dual de E.
On définit la forme bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle : E^* \times E \to \mathbf{K}$ par $\langle \omega, x\rangle = \omega(x)$. Cette forme bilinéaire est appelée crochet de dualité.

Exemple 2.

1. Dans $E = \mathbf{K}^n$, si $a_1, \dots, a_n$ sont des scalaires, alors l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ est une forme linéaire.
2. Si E est un $\mathbf{R}$–e.v. euclidien et $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ son produit scalaire, alors pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \langle x \mid y\rangle$ est une forme linéaire.
3. Si $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'application $M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$ est une forme linéaire.
4. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et si $f : E \to \mathbf{R}$ est différentiable au point $x \in E$, alors la différentielle de f au point x, notée $\mathrm{d}f(x)$ est une forme linéaire.
5. Si $E = \mathbf{K}_n[X]$ et si $a \in \mathbf{K}$ alors l'application $P \mapsto P(a)$ est une forme linéaire.

Proposition 3. *Soit $\omega \in E^*$ non nulle, alors* $\ker\omega$ *est un hyperplan de E. Réciproquement, tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.*

Définition 4. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on définit la forme linéaire e_i^* par $\langle e_i^*, e_j\rangle = \delta_{ij}$, appelée forme linéaire coordonnée d'indice i, relativement à la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Théorème 5. *Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de $\mathscr{B}$. En particulier,* $\dim E = \dim E^*$.

Remarque 6. En particulier, E et E^* sont isomorphes. Cependant, cet isomorphisme n'est pas canonique.

Proposition 7. *Si $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ alors on note $\omega_A : M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$. L'application $A \mapsto \omega_A$ est un isomorphisme (canonique) de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$.*

Application 8. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Si ω est une forme linéaire vérifiant $\omega(MN) = \omega(NM)$ alors ω est proportionnelle à l'application $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$.
2. Si $n \geqslant 2$, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ intersecte $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

2 Espace bidual

Définition 9. Le dual de E^* est appelé espace bidual de E, noté E^{**}.

Théorème 10. *Pour $x \in E$, on définit $\Phi_x \in E^{**}$ par $\Phi_x(\omega) = \omega(x)$. Alors l'application $x \mapsto \Phi_x$ est un isomorphisme de E dans E^{**}.*

Remarque 11. Cet isomorphisme est canonique, on peut donc identifier E avec son bidual.

Proposition 12. *Soit $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ une base de E^*. Alors il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $\omega_i = e_i^*$ pour tout i. On l'appelle base antéduale (ou préduale).*

Exemple 13 (Polynômes interpolateurs de Lagrange)**.** On considère $E = \mathbf{K}_n[X]$ et des scalaires $a_0, \dots, a_n$ distincts. Notons ω_i la forme linéaire définie par $\omega_i(P) = P(a_i)$. Soit $(L_0, \dots, L_n)$ la base antéduale de la base $(\omega_0, \dots \omega_n)$. Les polynômes L_i sont appelés polynômes interpolateurs de Lagrange aux points $a_0, \dots, a_n$, définis par les relations $L_i(a_j) = \delta_{ij}$.

3 Orthogonalité et dualité

Définition 14.

1. Soient $\omega \in E^*$ et $x \in E$. On dit que ω et x sont orthogonaux si $\langle \omega, x\rangle$ est nul.
2. Soit A une partie de E. On définit l'orthogonal (ou annulateur) de A comme étant le s.e.v. de E^* : $A^{\mathrm{o}} = \left\{\omega \in E^* \mid \forall x \in A,\ \langle \omega, x\rangle = 0\right\}$
3. De même, soit B une partie de E^*. On définit l'orthogonal de B comme étant le s.e.v. de E : $B^{\mathrm{o}} = \{x \in E \mid \forall \omega \in B,\ \langle \omega, x\rangle = 0\}$

Proposition 15. *Soient A et B des parties de E (ou de E^*).*

1. *Si $A \subseteq B$ alors $B^{\mathrm{o}} \subseteq A^{\mathrm{o}}$.*
2. *$A^{\mathrm{o}} = \mathrm{Vect}(A)^{\mathrm{o}}$.*

Théorème 16. *Soit F un s.e.v. de E (ou de E^*). Alors* $\dim E = \dim F + \dim F^{\mathrm{o}}$ *et on a l'égalité $F^{\mathrm{oo}} = F$.*

Corollaire 17 (équations d'un s.e.v.)**.**

1. *Soient $\omega_1, \dots, \omega_k$ des formes linéaires et notons r leur rang. Alors l'ensemble $F = \{x \in E \mid \forall 1 \leqslant i \leqslant k,\ \langle \omega_i, x\rangle = 0\}$ est un s.e.v. de E de dimension $n - r$.*
2. *Soit F un s.e.v. de E de dimension p. Alors il existe $n - p$ formes linéaires indépendantes $\omega_1, \dots, \omega_{n-p}$ telle qu'on ait l'égalité $F = \left\{x \in E \,\middle|\, \forall 1 \leqslant i \leqslant n-p,\ \langle \omega_i, x\rangle = 0\right\}$.*

Remarque 18. Autrement dit, tout s.e.v. de dimension p est l'intersection de $n - p$ hyperplans.

Proposition 19. *Soit A et B deux s.e.v. de E (ou de E^*). Alors :*

1. *$(A + B)^{\mathrm{o}} = A^{\mathrm{o}} \cap B^{\mathrm{o}}$.*
2. *$(A \cap B)^{\mathrm{o}} = A^{\mathrm{o}} + B^{\mathrm{o}}$.*

Application 20 (générateurs du groupe orthogonal)**.** Soit E un espace euclidien et soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Notons $r = \mathrm{rg}(u - \mathrm{id}_E)$. Alors u s'écrit comme le produit d'exactement r réflexions, et ce nombre est minimal.

4 Espaces euclidiens et calcul différentiel

On considère E un espace euclidien de dimension n et on note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire.

Proposition 21. *Pour $x \in E$ notons ω_x la forme linéaire $y \mapsto \langle x \mid y\rangle$. Alors l'application $x \mapsto \omega_x$ est un isomorphisme entre E et E^*.*

Remarque 22. Le produit scalaire donne un isomorphisme canonique entre E et E^*. De plus, on a $\langle \omega_x, y\rangle = \langle x \mid y\rangle$. Si on identifie E et E^* via cet isomorphisme, on voit que l'orthogonalité au sens du dual coïncide avec l'orthogonalité au sens du produit scalaire.

Exemple 23. Si $f : E \to \mathbf{R}$ est différentiable au point $x \in E$, alors il existe un unique vecteur de E, noté $\nabla f(x)$, tel que $\mathrm{d}f(x).h = \langle \nabla f(x) \mid h\rangle$. Ce vecteur s'appelle le gradient de f au point x.

Théorème 24 (Extrema liés)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et soient $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions de classe C^1 de U dans $\mathbf{R}$. On considère l'ensemble :*

$$M = \left\{x \in U \,\middle|\, g_1(x) = \cdots = g_p(x) = 0\right\}$$

Soit $m \in M$, on suppose que $\mathrm{d}g_1(m), \dots, \mathrm{d}g_p(m)$ sont linéairement indépendantes. Si m est un extremum relatif de f sur M, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $\mathrm{d}f(m) = \lambda_1 \mathrm{d}g_1(m) + \cdots + \lambda_p \mathrm{d}g_p(m)$.

Application 25 (Inégalité de Hadamard)**.** Pour tous vecteurs $v_1, \dots, v_n$ de $\mathbf{R}^n$, on a l'inégalité : $|\det(v_1, \dots, v_n)| \leqslant \|v_1\|_2 \times \cdots \times \|v_n\|_2$ avec égalité ssi les vecteurs sont orthogonaux ou l'un des vecteurs est nul.

5 Application transposée

On considère à présent F un autre $\mathbf{K}$–e.v. de dimension finie p et une application $f : E \to F$ linéaire.

Définition 26. On définit l'application transposée ${}^{\mathrm{t}}f : F^* \to E^*$ par ${}^{\mathrm{t}}f(\omega) = \omega \circ f$.

Remarque 27. L'application transposée de f est caractérisée par la relation $\langle \omega, f(x)\rangle = \langle {}^{\mathrm{t}}f(\omega), x\rangle$ pour tous $\omega \in F^*$ et $x \in E$.

Proposition 28. *L'application transposée est linéaire de F^* dans E^*. De plus, l'application $f \mapsto {}^{\mathrm{t}}f$ est linéaire de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{L}(F^*,E^*)$.*

Proposition 29. *En identifiant E et F à leurs biduaux respectifs, on a l'identité ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}f) = f$.*

Proposition 30. *Soient $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F. Notons $\mathscr{B}_E^*$ et $\mathscr{B}_F^*$ les bases duales correspondantes. Alors on a l'égalité matricielle :* $\mathrm{mat}({}^{\mathrm{t}}f, \mathscr{B}_F^*, \mathscr{B}_E^*) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{mat}(f, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$

Corollaire 31. *Soient $\mathscr{B}$ et $\widetilde{\mathscr{B}}$ deux bases de E et soient $\mathscr{B}^*$ et $\widetilde{\mathscr{B}}^*$ les bases duales correspondantes. Si P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\widetilde{\mathscr{B}}$ alors ${}^{\mathrm{t}}P^{-1}$ est la matrice de passage de $\mathscr{B}^*$ à $\widetilde{\mathscr{B}}^*$.*

Proposition 32. *On a les égalités suivantes :*

1. $\ker({}^{\mathrm{t}}f) = (\mathrm{Im}\, f)^{\mathrm{o}}$
2. $\mathrm{rg}\, {}^{\mathrm{t}}f = \mathrm{rg}\, f$
3. $\mathrm{Im}({}^{\mathrm{t}}f) = (\ker f)^{\mathrm{o}}$

Corollaire 33. *Une matrice et sa transposée ont le même rang.*

Proposition 34. *Soient E, F et G trois $\mathbf{K}$–e.v. de dimension finie et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ linéaires. Alors ${}^{\mathrm{t}}(g \circ f) = {}^{\mathrm{t}}f \circ {}^{\mathrm{t}}g$.*

Proposition 35. *On suppose que $f : E \to E$ linéaire. Alors un s.e.v. de E est stable par f ssi son orthogonal est stable par ${}^{\mathrm{t}}f$.*

Application 36. Si f et g sont deux endomorphismes de E trigonalisables qui commutent alors il existe une base commune de trigonalisation.

6 Réduction de Frobenius

annexe du Gourdon.

Développements

1. Théorème 16 et théorème des extrema liés. **[24]**
2. Réduction de Frobenius.

Références

- AVEZ, *Calcul différentiel.*
- GOURDON, *Les maths en tête, algèbre.*
- GRIFONE, *Algèbre linéaire.*
- ROUVIÈRE, *Petit guide de calcul différentiel.*