Leçon 152 : Déterminant. Exemples et applications.

1 L'application déterminant

On considère E un $\mathbf{K}$–espace vectoriel de dimension finie.

Définition 1. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Une k–forme linéaire sur E est une application $f : E^k \to \mathbf{K}$ qui est linéaire en chacune de ses variables. On dit qu'elle est alternée si $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les x_i sont égaux.

Théorème 2. *L'ensemble des n–formes linéaires alternées sur E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 1.*

Définition 3. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, on appelle déterminant dans la base $\mathscr{B}$ l'unique forme n–linéaire alternée valant 1 sur cette base. De plus, si $x_1, \dots, x_n \in E$ avec $x_i = \sum_j x_{i,j} e_j$ alors :

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{n,\sigma(n)}$$

Proposition 4 (changement de base)**.** *Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E alors* $\det_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$. *En particulier,* $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = 1$.

Théorème 5. *Soient $x_1, \dots, x_n \in E$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.*
2. *Le déterminant de $(x_1, \dots, x_n)$ est nul dans toute base de E.*
3. *Il existe une base de E dans laquelle le déterminant de $(x_1, \dots, x_n)$ est nul.*

Définition 6. Soit f un endomorphisme de E et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ ne dépend pas de la base choisie, on l'appelle le déterminant de f, noté $\det f$.

Proposition 7.

1. $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.
2. *Si f et g sont deux endomorphismes de E, alors* $\det(f \circ g) = \det f \times \det g$.
3. *Soit f un endomorphisme de E. Alors $f \in \mathrm{GL}(E)$ ssi* $\det f \neq 0$. *Dans ce cas,* $\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$.

Remarque 8. Autrement dit, $\det : \mathrm{GL}(E) \to \mathbf{K}^*$ est un morphisme de groupes. Son noyau est appelé groupe spécial linéaire de E, noté $\mathrm{SL}(E)$.

Définition 9. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on appelle déterminant de A le déterminant des colonnes de A (vues comme éléments de $\mathbf{K}^n$) dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

Proposition 10. *Si A est la matrice d'un endomorphisme f dans une base de E, alors* $\det(A) = \det(f)$.

Corollaire 11. *Une matrice A est inversible ssi* $\det A \neq 0$.

2 Calcul de déterminants

Proposition 12. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$,* $\det {}^t\!A = \det A$.

Théorème 13 (opérations élémentaires)**.** *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.*

1. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et A_σ la matrice obtenue à partir de A en permutant les colonnes de A selon σ. Alors* $\det A_\sigma = \varepsilon(\sigma) \det A$.
2. *Si on ajoute à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes de A, le déterminant reste inchangé.*

Remarque 14. C'est aussi valable pour les lignes.

Définition 15. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Notons $A_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i–ième ligne et la j–ième colonne. On appelle cofacteur associé au coefficient $a_{i,j}$ le scalaire $\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A_{i,j}$. On appelle comatrice de A, notée $\mathrm{Com}(A)$, la matrice $(\Delta_{i,j})$.

Proposition 16. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.*

1. $\forall j$, $\det A = \sum_{k=1}^n a_{k,j}\Delta_{k,j}$.
2. $\forall i$, $\det A = \sum_{k=1}^n a_{i,k}\Delta_{i,k}$.

Corollaire 17.

1. *Si M est triangulaire, alors* $\det M$ *est le produit de ses éléments diagonaux.*
2. *Si M est donnée par blocs* $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, *alors* $\det M = (\det A)(\det D)$.

Théorème 18. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, alors* $A \times {}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A)\,\mathrm{I}_n$.

Exemple 19 (Vandermonde)**.** Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{K}$ et soit :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ & & \ddots & \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors le déterminant de V est appelé déterminant de Vandermonde et vaut $\mathrm{Vand}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{i<j}(a_j - a_i)$.

Exemple 20 (déterminant circulant)**.** Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$. On considère la matrice circulante :

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ & & \ddots & \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

Soit $P(X) = a_1 + a_2 X + \cdots + a_n X^{n-1} \in \mathbf{C}[X]$. Alors $\det C = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega^j)$ où $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.

3 Utilisation en algèbre linéaire

Théorème 21 (Cramer)**.** *On considère le système linéaire $Ax = b$. Alors ce système admet une unique solution pour tout b ssi* $\det A \neq 0$. *De plus, en notant $c_1, \dots, c_n$ les colonnes de A, on a les formules de Cramer :*

$$x_i = \frac{\det(c_1, \dots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \dots, c_n)}{\det A}$$

Définition 22. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, on appelle mineur d'ordre r le déterminant d'une matrice extraite de A de taille $r \times r$.

Théorème 23. *Une matrice est de rang r ssi il existe un mineur d'ordre r non nul et si tous les mineurs d'ordre $s > r$ sont nuls.*

Définition 24. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Alors $X\mathrm{I}_n - A \in \mathscr{M}_n\big(\mathbf{K}(X)\big)$, on appelle polynôme caractéristique de A, noté χ_A, le déterminant de $X\mathrm{I}_n - A$. Alors χ_A est bien un polynôme de $\mathbf{K}[X]$.

Proposition 25. *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. On définit alors le polynôme caractéristique d'un endomorphisme comme le polynôme caractéristique de sa matrice dans une base quelconque.*

Proposition 26. *λ est valeur propre de f ssi* $\chi_f(\lambda) = 0$.

Application 27. Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est nilpotente ssi $\forall k \geqslant 1$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$.

Théorème 28. *Un endomorphisme est trigonalisable sur* $\mathbf{K}$ *ssi son polynôme caractéristique est scindé sur* $\mathbf{K}$.

Application 29 (Cayley–Hamilton)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, alors $\chi_A(A) = 0$.

Théorème 30 (inégalité de Hadamard)**.** *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et soient $X_1, \dots, X_n$ ses colonnes. Alors $|\det M| \leqslant \|X_1\| \cdots \|X_n\|$ où $\|X\| = \sqrt{X^* X}$. De plus il y a égalité ssi les X_i sont deux à deux orthogonaux.*

Définition 31. Soit E un espace pré-hilbertien (pas nécessairement de dimension finie) et soient $x_1, \dots, x_n \in E$. On appelle matrice de Gram de $x_1, \dots, x_n$ la matrice $\big(\langle x_i \mid x_j \rangle\big)_{i,j}$. On note $G(x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de cette matrice.

Proposition 32. *La matrice de Gram de $x_1, \dots, x_n$ est hermitienne positive. Elle est définie ssi les x_i sont libres.*

Théorème 33. *Soit V un s.e.v. de E de dimension finie n et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de V. Soit $x \in E$, alors $d = \operatorname{dist}(x, V)$ vérifie :*

$$d^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

4 Régularité et conséquences

On suppose $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Proposition 34. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Alors $\det A$ est polynomiale en les coefficients de A, donc l'application $A \mapsto \det A$ est de classe C^∞.*

Application 35. $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Application 36. $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est connexe (par arcs).

Proposition 37. *Le déterminant est différentiable et sa différentielle est donnée par $\mathrm{d}(\det)(M).H = \operatorname{Tr}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(M)H)$.*

Théorème 38. *$\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est une hypersurface de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Son espace tangent en I_n est l'espace des matrices de trace nulle.*

Proposition 39. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$ et soit $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$. Notons λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$. Alors $\lambda\big(u(B)\big) = |\det u|\, \lambda(B)$.*

Théorème 40 (changement de variables)**.** *Soit φ un C^1–difféomorphisme d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ sur un ouvert V de $\mathbf{R}^n$. Alors f est intégrable sur V ssi $(f \circ \varphi)|\det J_\varphi|$ est intégrable sur U et dans ce cas :*

$$\int_V f(y)\,\mathrm{d}y = \int_U f\big(\varphi(x)\big)\,|\det J_\varphi(x)|\,\mathrm{d}x$$

Application 41. une application en proba.

Développements

1. Inégalité de Hadamard et matrices de Gram. **[30]**
2. Différentielle du déterminant et sous-variété. **[37]**

Références

- Beck, Malick et Peyré, *Objectif agrégation*.
- Birane et Pagès, *Analyse – Théorie de l'intégration*.
- Gourdon, *Les maths en tête, algèbre*.
- Grifone, *Algèbre linéaire*.