Leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

On considère E un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$.

1 Familles libres, familles génératrices, bases

Définition 1. Soit $\mathscr{F} = (x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs.

1. On dit que la famille est génératrice si tout vecteur de E est combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{F}$.
2. On dit que la famille est libre si toute combinaison linéaire nulle d'éléments de $\mathscr{F}$ est à coefficients nuls.
3. On dit que la famille est une base si elle est à la fois libre et génératrice.
4. On dit que l'espace E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Exemple 2.

1. Dans $\mathbf{K}^n$, la famille $(e_1,\dots,e_n)$, où $e_i = (0,\dots,1,\dots,0)$, est une base appelée base canonique de $\mathbf{K}^n$.
2. L'espace $\mathbf{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

On supposera dans la suite que E est de dimension finie.

Proposition 3. *Une famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base ssi tout vecteur de E se décompose de façon unique comme combinaison linéaire des x_i.*

Corollaire 4. *Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une base de E. L'application :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_n) & \longmapsto & \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème 5 (base incomplète)**.** *On suppose que $E \neq \{0\}$. Soient $\mathscr{L}$ une famille libre et $\mathscr{G}$ une famille génératrice. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{B} \subseteq \mathscr{G}$.*

Application 6. On considère l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur E par $f\cdot x = f(x)$. Cette action n'a que deux orbites : $\{0\}$ et $E\setminus\{0\}$.

Application 7 (Théorème de Burnside)**.** Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ d'exposant fini, c'est-à-dire $\exists N \in \mathbf{N}^*$ tel que $\forall A \in G$, $A^N = \mathrm{I}_n$. Alors G est un groupe fini.

Théorème 8. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal. Ce cardinal est appelé la dimension de E sur $\mathbf{K}$.*

Exemple 9. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, on considère le système différentiel $Y' = A(t)Y$ où $A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est continue. Alors l'ensemble S des solutions de ce système est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ et pour $t_0 \in I$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ Y & \longmapsto & Y(t_0) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, l'espace des solutions est de dimension n.

Corollaire 10.

1. *Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille ayant plus de n éléments est liée.*
2. *Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille ayant moins de n éléments n'est pas génératrice.*

Application 11. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, alors il existe un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

2 Sous-espaces vectoriels

Proposition 12. *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors tout sous-espace vectoriel F est de dimension inférieure ou égale à n. De plus,* $\dim F = \dim E$ *ssi* $F = E$.

Définition 13. Soit E un espace vectoriel. Soient $F_1, \dots, F_k$ des s.e.v. On dit que E est somme direct des F_i si pour tout $x \in E$, il existe des $x_i \in F_i$ uniques tels que $x = x_1 + \dots + x_k$. On note $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$.

Théorème 14. *On suppose que E est de dimension finie. Alors $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$ ssi pour toutes bases $\mathscr{B}_i$ de F_i, la famille $(\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_k)$ est une base de E.*

Corollaire 15. $\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_k) = \dim F_1 + \dots + \dim F_k$.

Définition 16. Soient F et G deux s.e.v. de E. On dit que F et G sont supplémentaire si $E = F \oplus G$.

Proposition 17. *Tout s.e.v. admet un supplémentaire.*

Exemple 18. $\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

3 Rang d'une application linéaire

On considère E et F deux **K**–espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 19. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle rang de f la dimension de l'image de f.

Théorème 20 (théorème du rang)**.** *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors* $E = \dim(\ker f) + \operatorname{rg} f$.

Corollaire 21. *On suppose que E et F ont même dimension. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors f est injective ssi elle est surjective ssi elle est bijective.*

Application 22 (polynômes interpolateurs de Lagrange)**.** Soit $a_0, \dots, a_n$ des scalaires tous distincts. Alors l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(a_0), \dots, P(a_n)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Proposition 23 (formule de Grassman)**.** *Soient G et G' deux s.e.v. de E. Alors* $\dim(G + G') = \dim G + \dim G' - \dim(G \cap G')$.

Application 24. Soit E un espace euclidien et soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Notons $r = \operatorname{rg}(u - \mathrm{id}_E)$. Alors u s'écrit comme le produit d'exactement r réflexions, et ce nombre est minimal.

4 Rang d'une matrice

Soient n et p dans $\mathbf{N}^*$, on considère $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Définition 25. On appelle rang d'une matrice la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes (vues comme des éléments de $\mathbf{K}^p$).

Proposition 26. *Soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$, alors* $\operatorname{rg}(PMQ) = \operatorname{rg} M$.

Remarque 27. Le rang d'une matrice ne change pas lorsque l'on fait des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

Définition 28. On dit que deux matrice A et B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont équivalentes s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ telles que $A = PBQ$.

Théorème 29. *Toute matrice M de rang r est équivalente à la matrice* $\mathrm{J}_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Corollaire 30. *Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont le même rang.*

Définition 31. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, on appelle mineur d'ordre r le déterminant d'une matrice extraite de A de taille $r \times r$.

Théorème 32. *Une matrice est de rang r ssi il existe un mineur d'ordre r non nul et si tous les mineurs d'ordre $s > r$ sont nuls.*

Proposition 33. *On suppose que* $\mathbf{K}$ *est* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$. *Notons $\mathcal{O}_r$ l'orbite des matrices de rang r. Alors l'adhérence de $\mathcal{O}_r$ est donnée par la réunion disjointe :*

$$\overline{\mathcal{O}_r} = \bigsqcup_{0 \leqslant k \leqslant r} \mathcal{O}_k$$

Corollaire 34. *On suppose que* $\mathbf{K}$ *est* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$. *L'unique orbite fermée est celle de la matrice nulle $\mathcal{O}_0 = \{0\}$ et l'unique orbite ouverte est $\mathcal{O}_{\min(n,p)}$. En particulier, si $n = p$ alors $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

Proposition 35. *Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, les orbites $\mathcal{O}_r$ sont connexes.*

5 Espaces vectoriels normés

On considère $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et E un $\mathbf{K}$–espace vectoriel.

Définition 36. On appelle norme sur E toute application $N : E \to [0, +\infty[$ vérifiant :

1. $N(x) = 0 \iff x = 0$.
2. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
3. $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Théorème 37. *On suppose que E est de dimension finie. Soient N_1 et N_2 deux normes sur E, alors il existe $C, C' > 0$ tels que $N_1 \leqslant C N_2 \leqslant C' N_1$.*

Corollaire 38. *Les compacts d'un espace vectoriel de dimension finie sont les fermés bornés.*

Corollaire 39. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Corollaire 40. *Si E et F sont deux e.v.n. avec E de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.*

Théorème 41 (Riesz)**.** *L'espace E est de dimension finie ssi la boule unité fermée est compacte.*

Développements

1. Théorème de Burnside. **[7]**
2. Générateurs de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$. **[24]**

Références

— Beck, Malick et Peyré, *Objectif agrégation.*
— Caldero et Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome I.*
— Gourdon, *Les maths en tête, algèbre.*
— Grifone, *Algèbre linéaire.*
— Pommellet, *Agrégation de mathématiques – Cours d'analyse.*