Leçon 150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Dans cette leçon, on travaille sur $\mathbf{K}$ un corps, et on considère $n, p \in \mathbf{N}^*$.

1 Action par multiplication à gauche, à droite

Définition 1. On appelle action par multiplication à gauche l'action (à gauche) suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ (P, M) & \longmapsto & PM \end{array}$$

On appelle action par multiplication à droite l'action (à droite) suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_p(\mathbf{K}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ (P, M) & \longmapsto & MP \end{array}$$

Définition 2. On appelle matrices élémentaires les trois types de matrices suivants :
- On appelle matrices de dilatation les matrices $D_{i,\alpha}^{(k)} = \begin{bmatrix} I_{i-1} & & \\ & \alpha & \\ & & I_{k-i-1} \end{bmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbf{K}^*$.
- On appelle matrices de transvection les matrices $T_{i,j,\beta}^{(k)} = I_k + \beta E_{i,j}$ avec $\beta \in \mathbf{K}^*$ et $i \neq j$.
- On appelle matrices de permutation les matrices $P_{i,j}^{(k)} = P_{j,i}^{(k)}$ de la forme :

$$\begin{bmatrix} I_{i-1} & & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & I_{j-i-1} & & & \\ & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & I_{k-j-1} \end{bmatrix}$$

Proposition 3. *Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Les opérations élémentaires sur les lignes de M sont obtenues par multiplication à gauche par des matrices élémentaires :*

Matrice	$D_{i,\alpha}^{(n)}M$	$T_{i,j,\beta}^{(n)}M$	$P_{i,j}^{(n)}M$
Opération	$L_i \leftarrow \alpha L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$

De même, les opérations élémentaires sur les colonnes de M sont obtenues par multiplication à droite par des matrices élémentaires :

Matrice	$MD_{i,\alpha}^{(p)}$	$MT_{i,j,\beta}^{(p)}$	$MP_{i,j}^{(p)}$
Opération	$C_i \leftarrow \alpha C_i$	$C_i \leftarrow C_i + \beta C_j$	$C_i \leftrightarrow C_j$

Définition 4. On appelle pivot d'une ligne non nulle le coefficient non nul situé dans la colonne la plus à gauche. Une matrice est dite échelonnée en lignes si :
- lorsqu'une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes sont nulles ;
- le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que les pivots des lignes précédentes.

Une matrice échelonnée est dite réduite si de plus, tous les pivots sont égaux à 1 et les pivots sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.
Une matrice est dite échelonnée en colonnes (réduite) si sa transposée est échelonnée en lignes (réduite).

Théorème 5.
1. *Deux matrices M et M' de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont dans la même orbite pour l'action par multiplication à gauche ssi elles ont le même noyau.*
2. *Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée en lignes réduite.*

Théorème 6.
1. *Deux matrices M et M' de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont dans la même orbite pour l'action par multiplication à droite ssi elles ont la même image.*
2. *Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée en colonnes réduite.*

Théorème 7. *Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ est engendré par les matrices de transvection. Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est engendré par les matrices de transvection et les matrices de dilatation.*

2 Action de Steinitz

Définition 8. L'application suivante est une action du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ appelée action de Steinitz.

$$\begin{array}{ccc} \big(\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})\big) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ \big((P,Q), M\big) & \longmapsto & PMQ^{-1} \end{array}$$

On dira que deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont équivalentes si elles sont dans la même orbite pour l'action de Steinitz.

Théorème 9. *Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ de rang r est équivalente à la matrice $J_r = \left[\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.*

Corollaire 10. *Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont le même rang.*

Proposition 11. *On suppose que $\mathbf{K}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Notons $\mathscr{O}_r$ l'orbite des matrices de rang r. Alors l'adhérence de $\mathscr{O}_r$ est donnée par la réunion disjointe :*

$$\overline{\mathscr{O}_r} = \bigsqcup_{0 \leqslant k \leqslant r} \mathscr{O}_k$$

Corollaire 12. *On suppose que $\mathbf{K}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. L'unique orbite fermée est celle de la matrice nulle $\mathscr{O}_0 = \{0\}$ et l'unique orbite ouverte est $\mathscr{O}_{\min(n,p)}$. En particulier, si $n = p$ alors $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.*

Proposition 13. *Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, les orbites $\mathscr{O}_r$ sont connexes.*

3 Action par conjugaison

Définition 14. Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ agit par conjugaison sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Deux matrices sont semblables si elles sont dans la même orbite pour cette action.

Proposition 15. *Si deux matrices sont semblables, elles ont même trace, même rang, mêmes valeurs propres, même polynôme minimal et caractéristique.*

Proposition 16. *Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Alors A et B sont semblables sur $\mathbf{R}$ ssi elles sont semblables sur $\mathbf{C}$.*

Définition 17. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme unitaire, $P = X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \cdots + a_0$. On appelle matrice compagnon de P la matrice $\mathrm{C}(P) \in \mathscr{M}_k(\mathbf{K})$ définie par :

$$\mathrm{C}(P) = \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{k-2} \\ & & & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix}$$

Théorème 18. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Il existe une suite de polynômes unitaires $P_1, \ldots, P_r \in \mathbf{K}[X]$ et une matrice inversible $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ tels que :*

1. *P_{i+1} divise P_i*
2. *$A = Q \begin{bmatrix} \mathrm{C}(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{C}(P_r) \end{bmatrix} Q^{-1}$*

Les polynômes $P_1, \ldots, P_r$ sont uniques et sont appelés les invariants de similitude de A. De plus, P_1 est le polynôme minimal de A et $P_1 \times \cdots \times P_r$ est son polynôme caractéristique.

Corollaire 19. *Deux matrices sont semblables ssi elles ont les mêmes invariants de similitude.*

4 Réduction des endomorphismes normaux

On considère E un $\mathbf{R}$–e.v. euclidien de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$.

Définition 20. On dit qu'un endomorphisme u de E est normal si u et u^* commutent. On dit que $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est normale si M et ${}^{\mathrm{t}}M$ commutent.

Lemme 21. *Soit u un endomorphisme normal et soit F un s.e.v. stable par u. Alors F et $F^\perp$ sont stables par u et par u^*. De plus, $u_{|F}$ et $u_{|F^\perp}$ sont des endomorphismes normaux.*

Théorème 22. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice normale. Alors M est $\mathrm{O}(n)$–semblable à une matrice de la forme :*

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{bmatrix} \text{ avec } \lambda_i \in \mathbf{R} \text{ et } \tau_j = \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}),\ b_j \neq 0.$$

Corollaire 23. *Toute matrice de $Q \in \mathrm{O}(n)$ est $\mathrm{O}(n)$–semblable à une matrice de la forme :*

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \varepsilon_r & & & \\ & & & R_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_s \end{bmatrix} \text{ avec } \varepsilon_i \in \{\pm 1\} \text{ et } R_j = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{bmatrix} \text{ avec } \theta_j \neq 0[\pi].$$

Corollaire 24. *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée. De plus, si r (resp. s) est le nombre de ses valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives) alors le couple (r,s) est unique.*

5 Action par congruence

Dans cette section, on considère $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Définition 25. On appelle action par congruence l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ sur $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \\ (Q,S) & \longmapsto & QS{}^{t}Q \end{array}$$

Deux matrices sont dites congruentes si elles sont dans la même orbite pour cette action.

Définition 26. Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ non dégénérée, on appelle discriminant de S la quantité $\overline{\det(S)} \in \mathbf{K}^* / (\mathbf{K}^*)^2$.

Proposition 27. *Si deux matrices sont congruentes, alors elles ont même rang et même discriminant.*

Théorème 28. *Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbf{C})$ et r son rang. Alors S est congruente à la matrice* $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Corollaire 29. *Deux matrices de $\mathscr{S}_n(\mathbf{C})$ sont congruentes ssi elles ont le même rang.*

Théorème 30. *Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Alors il existe $r, s \in \mathbf{N}$ tels que S soit congruente à la matrice :*

$$\begin{bmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Le couple (r,s) est unique et est appelé la signature de S.

Corollaire 31. *Deux matrices de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ sont semblables ssi elles ont la même signature.*

Proposition 32. *On note $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ l'orbite de I_n sous l'action par congruence. Alors* $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}) = \left\{ S \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \;\middle|\; \forall x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\},\ {}^{t}xSx > 0 \right\}$.

6 Décomposition polaire

Théorème 33. *On considère l'action de groupe suivante sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{O}(n) \times \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ (Q,M) & \longmapsto & QM \end{array}$$

Alors l'orbite de toute matrice M contient une matrice symétrique positive. De plus, si M est inversible alors l'orbite de M contient une unique matrice S symétrique définie positive. Enfin, l'application qui à $(Q,S) \in \mathrm{O}(n) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ associe $QS \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un homéomorphisme.

Corollaire 34. *Pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, on a $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^{t}AA)}$.*

Corollaire 35. *Tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ contenant le groupe $\mathrm{O}(n)$ est le groupe $\mathrm{O}(n)$ lui-même.*

Proposition 36. *Tout sous-groupe fini G de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$.*

Développements

1. Décomposition de Frobenius. **[18]**
2. Réduction des endomorphismes normaux. **[22]**

Références

— CALDERO et GERMONI, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries.*
— GOURDON, *Les maths en tête, algèbre.*
— RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales tome 2 : algèbre et applications à la géométrie.*