Leçon 107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C–espace vectoriel. Exemples.

On considère V un $\mathbf{C}$–espace vectoriel de dimension finie n et un groupe fini G de cardinal g.

1 Définition et premiers exemples

Définition 1. On appelle représentation linéaire de G dans V un morphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$. La dimension de V est appelé le degré de la représentation. Si $s \in G$, on notera ρ_s plutôt que $\rho(s)$.

Remarque 2. C'est équivalent à considérer une action de G sur V par automorphismes linéaires.

Exemple 3.

1. Les représentations de degré 1 sont les morphismes de G dans $\mathbf{C}^*$. Comme tout élément de G est d'ordre fini, les valeur de ρ_s sont des racines de l'unité. La représentation $s \mapsto 1$ est appelée la représentation unité.
2. Si la dimension de V est égale au cardinal de G, V ayant pour base $(e_t)_{t\in G}$, on considère la l'application $s \mapsto \rho_s$ où ρ_s est l'application linéaire définie par $\rho_s(e_t) = e_{st}$. Alors ρ est une représentation appelée « la » représentation régulière de G. Elle est de degré g.
3. Si $G = \mathfrak{S}_n$, on dispose de la représentation par permutations $\rho : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ qui à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ associe la matrice de permutation $P_\sigma = (\delta_{\sigma(i),j})_{i,j}$. Elle est de degré n.

Définition 4. Soient $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V')$ deux représentations. Sur la somme directe $V \oplus V'$, on définit la représentation somme $\rho \oplus \rho'$ par : $(\rho \oplus \rho')_s(v, v') = (\rho_s(v), \rho'_s(v'))$.

Définition 5. Soient $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V')$ deux représentations de G. On dit que $f : V \to V'$ est un morphisme de représentations si f est linéaire et vérifie $\forall s \in G$, $f \circ \rho_s = \rho'_s \circ f$.
Si de plus f est un isomorphisme, on dit que les représentations sont isomorphes.

2 Sous-représentation

Définition 6. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation et soit W un s.e.v. de V stable par G : $\forall s \in G$, $\rho_s(W) \subseteq W$. La restriction des ρ_s à W définit alors une représentation de G dans W appelée sous-représentation de V.

Exemple 7. Soient $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V')$ deux représentations et considérons la représentation $\rho \oplus \rho'$. Alors V et V' sont des sous-représentations de $V \oplus V'$.

Définition 8. On dit qu'une représentation est irréductible si V n'est pas réduit à $\{0\}$ et si elle n'admet pas de sous-représentations autres que $\{0\}$ et V lui-même.

Exemple 9.

1. Tout représentation de degré 1 est irréductible.
2. La représentation régulière de G n'est pas irréductible : la droite engendrée par le vecteur $\sum_{t\in G} e_t$ est stable et donne une sous-représentation isomorphe à la représentation unité.
3. La représentation par permutations de $\mathfrak{S}_n$ n'est pas irréductible : la droite engendré par $(1, \dots, 1)$ est stable, de même que l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Notons que ces deux s.e.v. sont supplémentaires.

Théorème 10. *Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation et soit W un s.e.v. stable par G. Alors W admet un supplémentaire stable par G.*

Corollaire 11. *Toute représentation est somme directe de sous-représentations irréductibles.*

3 Caractères d'une représentation

Définition 12. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation. On appelle caractère de la représentation ρ l'application $\chi : G \to \mathbf{C}$ définie par $\chi(s) = \mathrm{Tr}(\rho_s)$. Si la représentation est irréductible, on parlera de caractère irréductible.

Proposition 13. *Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation et soit χ son caractère.*

1. $\chi(1) = n$.
2. $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$.
3. $\chi(sts^{-1}) = \chi(t)$.

Exemple 14.

1. Le caractère d'une représentation de degré 1 se confond avec la représentation. Ainsi les caractères d'une représentation de degré 1 sont les morphismes de G dans $\mathbf{C}^*$. Le caractère de la représentation unité est le morphisme trivial $\chi : s \mapsto 1$.
2. Le caractère de la représentation régulière de G est la fonction χ définie par $\chi(e) = g$ et $\chi(s) = 0$ si $s \neq e$.
3. Le caractère de la représentation par permutations de $\mathfrak{S}_n$ est la fonction χ définie par $\chi(\sigma) = \#\mathrm{Fix}(\sigma)$.

Proposition 15. *Soient $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V')$ deux représentations de caractères respectifs χ et χ'. Alors la représentation $\rho \oplus \rho'$ a pour caractère $\chi + \chi'$.*

Lemme 16 (Schur)**.** *Soient $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V')$ deux représentations irréductibles et soit $f : V \to V'$ un morphisme de représentations.*

1. *Ou bien f est nulle, ou bien f est un isomorphisme.*
2. *Si $V = V'$ et $\rho = \rho'$, alors f est une homothétie.*

Corollaire 17. *Soit $h : V \to V'$ linéaire et posons $h_0 = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} {\rho'_t}^{-1} \circ h \circ \rho_t$.*

1. *Si ρ et ρ' ne sont pas isomorphes, alors h_0 est nulle.*
2. *Si $V = V'$ et $\rho = \rho'$, alors h_0 est une homothétie de rapport $\frac{\mathrm{Tr}(h)}{n}$.*

Définition 18. Si φ et ψ sont deux fonctions de G dans $\mathbf{C}$, on note :

$$\langle \varphi \mid \psi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{t\in G} \varphi(t)\overline{\psi(t)}$$

C'est un produit scalaire hermitien.

Théorème 19. *Soient χ et χ' deux caractères irréductibles.*

$$\langle \chi \mid \chi' \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi = \chi' \\ 0 & \text{si } \chi \text{ et } \chi' \text{ proviennent de représentations non isomorphes.} \end{cases}$$

Corollaire 20. *Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de caractère φ. Soit $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ une décomposition en sous-représentations irréductibles. Si W est une représentation irréductible de caractère χ, alors le nombre de W_i isomorphes à W est égal à $\langle \varphi \mid \chi \rangle$.*

Théorème 21. *Si φ est le caractère d'une représentation de G, alors $\langle \varphi \mid \varphi \rangle$ est un entier positif et celui-ci vaut 1 ssi la représentation est irréductible.*

Exemple 22. Notons $\chi_1, \ldots, \chi_h$ les caractères irréductibles, et $n_1, \ldots, n_h$ leurs degrés ($n_i = \chi_i(e)$). Chaque représentation irréductible est contenue dans la représentation régulière un nombre de fois égal à son degré. Comme $\chi_{\mathrm{reg}}(s)$ vaut g si $s = e$ et 0 sinon, on en déduit les deux relations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = g, \quad \forall s \neq e, \sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(s) = 0$$

Définition 23. Une fonction $f : G \to \mathbf{C}$ est centrale si $\forall s, t \in G$, $f(sts^{-1}) = f(t)$. L'ensemble des fonctions centrales est un $\mathbf{C}$–espace vectoriel de dimension h le nombre de classes de conjugaison de G.

Théorème 24. *Les caractères irréductibles de G forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales. Il y a donc h caractères irréductibles de G.*

On peut regrouper les informations sur les caractères irréductibles dans un tableau appelé table des caractères. On indexe les lignes par les caractères irréductibles et les colonnes par les classes de conjugaisons de G. Chaque case contient alors la valeur du caractère sur la classe de conjugaison. On trouvera en annexe quelques tables de caractères. Notamment :

Théorème 25. *Les groupes* D_4 *et* $\mathbf{H}_8$ *ont la même table de caractères.*

4 Caractères et dualité

On s'intéresse maintenant aux représentations de degré 1, c'est-à-dire aux morphismes de G dans $\mathbf{C}^*$.

Lemme 26. *Soit G un groupe et $\chi : G \to \mathbf{C}^*$ un morphisme. Alors χ se factorise en un morphisme de G^{ab} dans $\mathbf{C}^*$.*

Proposition 27. *Un groupe G est abélien ssi toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.*

Définition 28. Soit G un groupe abélien fini. On note $\hat{G}$ l'ensemble des morphismes de G dans $\mathbf{C}^*$.

Proposition 29. *On munit $\hat{G}$ d'une structure de groupe pour la loi de composition interne $(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$. Alors $\hat{G}$ est un groupe abélien fini et $|\hat{G}| = |G|$.*

Lemme 30 (relèvement de caractère)**.** *Soit G un groupe abélien fini et soit H un sous-groupe de G. Alors la restriction :*

$$\begin{array}{ccc} \hat{G} & \longrightarrow & \hat{H} \\ \chi & \longmapsto & \chi_{|H} \end{array}$$

est surjective.

Théorème 31 (structure des groupes abéliens finis)**.** *Soit G un groupe abélien fini. Alors il existe $1 < d_k \mid \cdots \mid d_1$ tels que G est isomorphe au produit $\mathbf{Z}/d_k\mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}/d_1\mathbf{Z}$. De plus, les nombres $d_k, \ldots, d_1$ sont uniques, on les appelles les invariants de G.*

Développements

1. Table de caractères de D_4 et $\mathbf{H}_8$. **[25]**
2. Lemme de relèvement et structure des groupes abéliens finis. **[31]**

Annexe

$\mathfrak{S}_3$	id	(12)	(123)
$\mathbf{1}$	1	1	1
ε	1	-1	1
χ_{std}	2	0	-1

$\mathfrak{S}_4$	id	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ_{std}	3	1	-1	0	-1
$\varepsilon\chi_{\text{std}}$	3	-1	-1	0	1
φ	2	0	2	-1	0

D_4	id	r_2	r_1	s_1	d_1
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	1	-1	1	-1
det	1	1	1	-1	-1
ε det	1	1	-1	-1	1
χ_{nat}	2	-2	0	0	0

Références

— CALDERO et GERMONI, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes de géométries, tome II.*
— PEYRÉ, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier.*
— SERRE, *Représentations linéaires des groupes finis.*