Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbf{K}$.

1 Définitions

Définition 1. On appelle groupe linéaire de E, noté $\mathrm{GL}(E)$, le groupe des automorphismes linéaires de E. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ le groupe des matrices carrés inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbf{K}$.
On appelle groupe spécial linéaire de E, noté $\mathrm{SL}(E)$, le sous-groupe des éléments de $\mathrm{GL}(E)$ de déterminant 1. On note $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ le sous-groupe des matrices inversibles de déterminant 1.

Proposition 2. *Si on fixe une base de E, on obtient un isomorphisme entre $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, ainsi qu'entre $\mathrm{SL}(E)$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$.*

Proposition 3. *On a une suite exacte $1 \to \mathrm{SL}(E) \to \mathrm{GL}(E) \to \mathbf{K}^* \to 1$ et $\mathrm{GL}(E)$ est le produit semi-direct de $\mathrm{SL}(E)$ par $\mathbf{K}^*$.*

Proposition 4. *Soit $q = p^m$ avec p premier.*

1. $\#\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q) = (q^n - 1)(q^n - q)\cdots(q^n - q^{n-1})$.
2. $\#\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q) = \frac{\#\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)}{q-1}$.

Proposition 5. *Le sous-groupe $S \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$ des matrices triangulaires supérieures à diagonale unité est un p–Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$.*

2 Générateurs de $\mathrm{GL}(E)$ et de $\mathrm{SL}(E)$

Définition 6. On appelle matrices élémentaires les trois types de matrices suivants :

1. On appelle matrices de dilatation les matrices $D^{(k)}_{i,\alpha} = \begin{bmatrix} I_{i-1} & & \\ & \alpha & \\ & & I_{k-i-1} \end{bmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbf{K}^*$.
2. On appelle matrices de transvection les matrices $T^{(k)}_{i,j,\beta} = I_k + \beta E_{i,j}$ avec $\beta \in \mathbf{K}^*$ et $i \neq j$.
3. On appelle matrices de permutation les matrices $P^{(k)}_{i,j} = P^{(k)}_{j,i}$ de la forme :
$$\begin{bmatrix} I_{i-1} & & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & & I_{j-i-1} & & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & I_{k-j-1} \end{bmatrix}$$

Proposition 7. *Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Les opérations élémentaires sur les lignes de M sont obtenues par multiplication à gauche par des matrices élémentaires :*

Matrice	$D^{(n)}_{i,\alpha}M$	$T^{(n)}_{i,j,\beta}M$	$P^{(n)}_{i,j}M$
Opération	$L_i \leftarrow \alpha L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$

De même, les opérations élémentaires sur les colonnes de M sont obtenues par multiplication à droite par des matrices élémentaires :

Matrice	$MD^{(p)}_{i,\alpha}$	$MT^{(p)}_{i,j,\beta}$	$MP^{(p)}_{i,j}$
Opération	$C_i \leftarrow \alpha C_i$	$C_i \leftarrow C_j + \beta C_i$	$C_i \leftrightarrow C_j$

Lemme 8. *Les matrices $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ et $\left[\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{smallmatrix}\right]$ sont des produits de matrices de transvection.*

Théorème 9. *Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ est engendré par les matrices de transvections. Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est engendré par les matrices de transvections et les matrices de dilatation.*

Proposition 10. *Soit H un hyperplan de E et soit $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $u_{|H} = \mathrm{id}_H$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\det u = \lambda \neq 1$.

2. *u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ et u est diagonalisable.*
3. *$D = \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \nsubseteq H$.*
4. *Il existe une base dans laquelle u a pour matrice une matrice de dilatation.*

Dans ces conditions, on dit que u est une dilatation d'hyperplan $H = \ker(u - \mathrm{id})$, de droite D et de rapport λ.

Proposition 11. *Deux dilatations sont conjuguées ssi elles ont même rapport.*

Proposition 12. *Soit $H = \ker f$ un hyperplan de E et soit $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $u_{|H} = \mathrm{id}_H$ et $u \neq \mathrm{id}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\det u = 1$.
2. *u n'est pas diagonalisable.*
3. *$D = \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \subseteq H$.*
4. *Il existe $a \in H$ non nul tel que $\forall x \in E$, $u(x) = x + f(x)a$.*
5. *Il existe une base dans laquelle u a pour matrice une matrice de transvection.*

Dans ces conditions, on dit que u est un transvection d'hyperplan H et de droite D.

Proposition 13. *Soit τ une transvection d'hyperplan H et de droite D et soit $u \in \mathrm{GL}(E)$. Alors $u\tau u^{-1}$ est une transvection d'hyperplan $u(H)$ et de droite $u(D)$.*

Théorème 14. *Le groupe $\mathrm{SL}(E)$ est engendré par les transvections. Le groupe $\mathrm{GL}(E)$ est engendré par les transvections et les dilatations.*

Lemme 15. *Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que pour toute droite D de E, $u(D) \subseteq D$. Alors u est une homothétie.*

Théorème 16. *Le centre Z de $\mathrm{GL}(E)$ est formé des homothéties. Le centre de $\mathrm{SL}(E)$ est $Z \cap \mathrm{SL}(E)$, il est isomorphe à $\mu_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des racines n–ième de l'unité dans K.*

3 Groupe linéaire sur R et C

On suppose à présent que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On munit l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ d'une norme quelconque.

Proposition 17. *Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.*

Application 18. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Proposition 19. *Les groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ sont connexes par arcs.*

Proposition 20. *Le sous-groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est une sous-variété de dimension $n^2 - 1$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Son espace tangent en l'identité est l'espace des matrices de trace nulle.*

Lemme 21. *Une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est nilpotente ssi pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathrm{Tr}(N^k) = 0$.*

Théorème 22 (Burnside)**.** *Tout sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ d'exposant fini est un sous-groupe fini.*

4 Groupe orthogonal

On considère maintenant E un espace euclidien de dimension n.

Définition 23. On appelle groupe orthogonal de E, noté $\mathrm{O}(E)$, le sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ des endomorphismes u tels que $\forall x, y \in E$, $\langle u(x) \mid u(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle$.
On note $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices Q telles que ${}^{\mathrm{t}}QQ = \mathrm{I}_n$.

Proposition 24. *Si on fixe une base orthonormée de E, alors $\mathrm{O}(E)$ est isomorphe à $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.*

Proposition 25. $O_n(\mathbf{R})$ *est un sous-groupe compact de* $GL_n(\mathbf{R})$.

Définition 26. On appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. On appelle retournement une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de dimension $n-2$.

Théorème 27. *Soit* $u \in O(E)$*, notons* $r = \mathrm{rg}(u - \mathrm{id}_E)$*. Alors* u *s'écrit comme le produit d'exactement* r *réflexions, et ce nombre est minimal.*

Corollaire 28. *Si* $n \geqslant 3$, $SO(E)$ *est engendré par les retournements.*

Proposition 29. $O_n(\mathbf{R})$ *est une sous-variété de dimension* $\frac{n(n-1)}{2}$ *de* $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$*. Son espace tangent en l'identité est l'espace des matrices antisymétriques.*

Théorème 30 (réduction des isométries)**.** *Soit* $u \in O(E)$*, alors il existe une base orthonormée dans laquelle* u *a pour matrice :*

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \varepsilon_r & & & \\ & & & R_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_s \end{bmatrix} \text{ avec } \varepsilon_i \in \{\pm 1\} \text{ et } R_j = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{bmatrix} \text{ avec } \theta_j \neq 0[\pi].$$

Corollaire 31. *Le sous-groupe* $SO_n(\mathbf{R})$ *est connexe par arcs.*

Application 32. Le groupe $SO_3(\mathbf{R})$ est simple.

Théorème 33 (Décomposition polaire)**.** *L'application :*

$$\begin{array}{ccc} O_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbf{R}) \\ (Q,S) & \longmapsto & QS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Corollaire 34. $GL_n(\mathbf{R})$ *admet deux composantes connexes par arcs :* $GL_n^+(\mathbf{R})$ *et* $GL_n^-(\mathbf{R})$.

Corollaire 35. *Si* G *est un sous-groupe compact de* $GL_n(\mathbf{R})$ *et si* G *contient* $O_n(\mathbf{R})$*, alors* $G = O_n(\mathbf{R})$.

Développements

1. Théorème de Burnside. **[22]**
2. Décomposition polaire. **[33]**

Références

— Caldero et Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, tomes I et II.*
— Cognet, *Algèbre linéaire.*
— Perrin, *Cours d'algèbre.*
— Szpirglas, *Mathématiques L3, algèbre.*