# Leçon 103 : Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

## 1 Sous-groupes distingués

**Définition 1.** Soit $G$ un groupe. On dit qu'un sous-groupe $H$ est distingué dans $G$ si pour tout $g \in G$, $gHg^{-1} = H$.

**Proposition 2.** *Soient $G$ et $G'$ deux groupes et soit $f : G \to G'$ un morphisme.*

1. *L'image réciproque d'un sous-groupe distingué de $G'$ est un sous-groupe distingué de $G$. En particulier,* $\ker f$ *est distingué dans $G$.*
2. *Si $f$ est surjective, l'image directe d'un sous-groupe distingué de $G$ est un sous-groupe distingué de $G'$.*

**Exemple 3.**

1. Si $G$ est abélien, tout sous-groupe est distingué.
2. Le centre $\mathrm{Z}(G)$ est distingué dans $G$.
3. Tout sous-groupe d'indice 2 est distingué. Par exemple, dans $\mathrm{D}_n$ le sous-groupe des rotations est distingué.
4. $\mathfrak{A}_n$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$.
5. $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

*Remarque* 4. La notion de sous-groupe distingué n'est pas transitive : si $K$ est distingué dans $H$ et $H$ est distingué dans $G$, on a pas nécessairement $K$ distingué dans $G$; par exemple $G = \mathfrak{S}_4$, $H = \mathrm{V}_4$ et $K = \{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4)\}$.

**Définition 5.** Soit $G$ un groupe. On dit qu'un sous-groupe $H$ est caractéristique dans $G$ si pour tout $f \in \mathrm{Aut}(G)$, $f(H) = H$.

**Exemple 6.**

1. Le centre d'un groupe est caractéristique.
2. Le sous-groupe dérivé est caractéristique.

**Proposition 7.** *Soit $G$ un groupe et soient $H, K$ deux sous-groupes de $G$, avec $K \subseteq H$. Si $K$ est caractéristique dans $H$ et si $H$ est distingué (resp. caractéristique) dans $G$, alors $K$ est distingué (resp. caractéristique) dans $G$.*

## 2 Groupe quotient

**Théorème 8** (groupe quotient)**.** *Soient $G$ un groupe et $H$ un sous-groupe distingué. Alors il existe une unique loi de groupe sur $G/H$ telle que la projection canonique de $G$ sur $G/H$ soit un morphisme.*

**Exemple 9.**

1. $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
2. $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.
3. $\mathrm{L}^p = \mathscr{L}^p/N$ avec $N$ le sous-groupe des fonctions nulles presque partout.

**Proposition 10.** *Soient $G$ un groupe et $H$ un sous-groupe distingué. Alors $H$ est distingué dans tout sous-groupe de $G$ le contenant et la projection canonique $\pi : G \to G/H$ induit une bijection $K \mapsto \pi(K) = K/H$ de l'ensemble des sous-groupes de $G$ contenant $H$ vers l'ensemble des sous-groupes de $G/H$.*

**Exemple 11.** Les sous-groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sont les $d\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour $d$ divisant $n$. Le groupe $d\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est alors cyclique d'ordre $\frac{n}{d}$, engendré par $\overline{d}$.

**Application 12.** Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ où $\varphi$ est la fonction indicatrice d'Euler.

**Application 13.** Le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique.

**Théorème 14** (factorisation de morphismes)**.** *Soient $G$ et $G'$ des groupes et soit $f : G \to G'$ un morphisme. Soit $H$ un sous-groupe distingué de $G$ tel que $H \subseteq \ker f$. Alors il existe un unique morphisme $\overline{f} : G/H \to G'$ tel que $f = \overline{f} \circ \pi$, où $\pi$ est la projection canonique de $G$ sur $G/H$.*

**Corollaire 15** (1^er^ théorème d'isomorphisme)**.** *Soient $G$ et $G'$ deux groupes et soit $f : G \to G'$ un morphisme. Alors $G/\ker f$ est isomorphe à $\operatorname{Im} f$.*

**Exemple 16.**

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ est isomorphe à $\mathbf{K}^*$.
2. $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
3. $G/\mathrm{Z}(G)$ est isomorphe à $\mathrm{Int}(G)$.
4. $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est isomorphe à $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C}^* \mid |z| = 1\}$.

**Corollaire 17** (2^e^ théorème d'isomorphisme)**.** *Soit $G$ un groupe et soient $H, K$ deux sous-groupes de $G$ avec $H$ distingué dans $G$. Posons $KH = \{kh : k \in K,\ h \in H\}$. Alors $K \cap H$ est distingué dans $K$, $KH$ est un sous-groupe de $G$, $H$ est distingué dans $KH$ et les groupes quotients $KH/H$ et $K/(K \cap H)$ sont isomorphes.*

**Corollaire 18** (3^e^ théorème d'isomorphisme)**.** *Soit $G$ un groupe et soient $H, K$ deux sous-groupes distingués de $G$ avec $K \subseteq H$. Alors $K$ est distingué dans $H$, $H/K$ est distingué dans $G/K$ et les groupes quotients $(G/K)/(H/K)$ et $G/H$ sont isomorphes.*

## 3 Sous-groupe dérivé

**Définition 19.** Soit $G$ un groupe. On appelle sous-groupe dérivé de $G$, noté $\mathrm{D}(G)$, le sous-groupe engendré par les commutateurs $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

**Proposition 20.** *Soit $G$ un groupe. Alors $G/\mathrm{D}(G)$ est abélien, on l'appelle l'abélianisé de $G$ et on le note $G^{\mathrm{ab}}$. De plus, $\mathrm{D}(G)$ est le plus petit sous-groupe distingué de $G$ donnant un quotient abélien.*

**Corollaire 21.** *Tout morphisme de $G$ dans un groupe abélien $G'$ se factorise en un morphisme de $G^{\mathrm{ab}}$ dans $G'$.*

**Définition 22.** On dit qu'un groupe $G$ est simple si ses seuls sous-groupes distingués sont $\{e\}$ et $G$.

**Exemple 23.** Les groupes simples abéliens sont les $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ avec $p$ premier.

**Théorème 24.** *Pour $n \geqslant 5$, $\mathfrak{A}_n$ est simple.*

**Corollaire 25.** *Pour $n \neq 4$, les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{\mathrm{id}\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$.*

**Corollaire 26.** *Pour $n \geqslant 5$, le sous-groupe dérivé de $\mathfrak{A}_n$ est $\mathfrak{A}_n$ et pour $n \geqslant 2$, le sous-groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathfrak{A}_n$.*

## 4 Produit semi-direct

**Théorème 27** (produit semi-direct)**.** *Soient $N$ et $H$ deux groupes et soit $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme (action de $H$ sur $N$ par automorphismes). On appelle produit semi-direct (externe) de $N$ par $H$ le groupe noté $N \rtimes_\varphi H$ dont l'ensemble sous-jacent est $N \times H$ et la loi est $(n, h) * (n', h') = (n\varphi_h(n'), hh')$.*
*En notant $N' = N \times \{e_H\}$ et $H' = \{e_N\} \times H$, alors $N'$ et $H'$ sont des sous-groupes de $G$ isomorphes à $N$ et $H$, et :*

1. *$N'$ est distingué dans $G$ ;*
2. *$N' \cap H' = \{e\}$ ;*
3. *$G = N'H'$.*

**Proposition 28.** *Soit $G$ un groupe et soient $N, H$ deux sous-groupes tels que :*

1. *$N$ est distingué dans $G$ ;*
2. *$N \cap H = \{e\}$ ;*
3. *$G = NH$.*

*Alors $G$ est isomorphe au produit semi-direct $N \rtimes_\varphi H$ avec $\varphi_h(n) = hnh^{-1}$. On dit que $G$ est le produit semi-direct interne de $N$ par $H$, on note simplement $G = N \rtimes H$.*

*Remarque* 29. Si $G = N \rtimes_\varphi H$, alors $G$ est le produit semi-direct interne de $N \times \{e_H\}$ par $\{e_N\} \times H$.

**Proposition 30.** *Si on a une suite exacte :*

$$1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$$

*et s'il existe $H'$ sous-groupe de $G$ tel que $p$ induise un isomorphisme entre $H'$ et $H$, alors $G$ est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes H$.*

*Remarque* 31. Dans ces conditions, $H$ est isomorphe à $G/i(N)$.

**Proposition 32.** *Si $G = N \rtimes H$ et si $H$ est distingué dans $G$ alors le produit est direct.*

**Exemple 33.**

1. $\mathrm{D}_n = \langle r \rangle \rtimes \langle s \rangle$.
2. $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \rtimes \langle \tau \rangle$ avec $\tau$ une transposition.
3. $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) = \mathrm{SL}_n(\mathbf{K}) \rtimes H$ où $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbf{K}^* \right\}$

**Proposition 34.** *Soient $p < q$ premiers.*

1. *Si $p \nmid (q-1)$, alors tout groupe d'ordre $pq$ est cyclique isomorphe à $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$.*
2. *Si $p \mid (q-1)$, alors il y a deux groupes d'ordre $pq$ non isomorphes : l'un est cyclique et l'autre est un produit semi-direct non commutatif de $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ par $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.*

## Développements

1. $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \geqslant 5$. **[24]**
2. Groupes d'ordre $pq$. **[34]**

## Références


— COMBES, *Algèbre et géométrie.*
— CORTELLA, *Théorie des groupes.*
— PERRIN, *Cours d'algèbre.*