Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

1 Définitions

Définition 1. Soit G un groupe et X un ensemble. On dit que G opère sur X s'il existe un application :

$$\begin{array}{ccc} G\times X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & g\cdot x \end{array}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall x\in X,\ e\cdot x = x$;
2. $\forall g,h\in G,\ \forall x\in X,\ (gh)\cdot x = g\cdot(h\cdot x)$.

Proposition 2. *Le groupe G opère sur X ssi il existe un morphisme $\Phi : G\to \mathfrak{S}(X)$.*

Définition 3. Soit G agissant sur X. Si $x\in X$, on appelle *stabilisateur* de x l'ensemble $\mathrm{Stab}(x)=\{g\in G \mid g\cdot x = x\}$ et on appelle *orbite* de x l'ensemble $\omega_x=\{g\cdot x : g\in G\}$.

Définition 4. Soit G agissant sur X. On dit que l'action est transitive si elle n'a qu'une seule orbite. On dit que l'action est fidèle si le morphisme de l'action $\Phi : G\to\mathfrak{S}(X)$ est injectif.

Exemple 5.

1. $\mathfrak{S}_n$ agit fidèlement et transitivement sur $[\![1;n]\!]$ par $\sigma\cdot i=\sigma(i)$.
2. Si E est espace vectoriel de dimension finie, alors $\mathrm{GL}(E)$ agit fidèlement et transitivement sur les bases de E par : $f\cdot(e_1,\dots,e_n) = \big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$.
3. Tout groupe G agit sur lui-même par conjugaison : $g\cdot x = gxg^{-1}$. L'orbite d'un élément est appelé le centralisateur de l'élément.
4. Tout groupe G agit fidèlement et transitivement sur lui-même par multiplication à gauche.

Théorème 6 (Cayley)**.** *Soit G un groupe fini de cardinal n, alors G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.*

2 Équation aux classes et conséquences

Proposition 7. *Soit G agissant sur X.*

1. *La relation « être dans une même orbite » est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalences sont les orbites.*
2. *Le stabilisateur d'un élément de X est un sous-groupe de G.*
3. *Si deux éléments sont dans une même orbite, leurs stabilisateurs sont conjugués.*

Application 8. Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. Alors l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $[\![1;n]\!]$ induit une action de $\langle\sigma\rangle$ sur $[\![1;n]\!]$. Notons $F_1,\dots,F_r$ les orbites pour cette action et définissons :

$$\sigma_i(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\notin F_i \\ \sigma(x) & \text{si } x\in F_i\end{cases}$$

Alors les σ_i sont des cycles d'ordre $|F_i|$, disjoints, et $\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_r$.

Proposition 9. *Soit G agissant sur X et soit $x\in X$. L'application $G\to\omega_x$, qui à g associe $g\cdot x$, induit une bijection de $G/\mathrm{Stab}(x)$ sur ω_x.*

Corollaire 10 (équation aux classes)**.** *Soit G un groupe fini, agissant sur X un ensemble fini. On note $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_k\}$ l'ensemble des orbites de l'action et $x_i\in\omega_i$. Alors :*

$$|X|=\sum_{i=1}^{k}|\omega_i|=\sum_{i=1}^{k}\frac{|G|}{|\mathrm{Stab}(x_i)|}$$

Exemple 11. Soit G un groupe fini agissant sur lui-même par conjugaison. On note Z son centre et $\omega_1, \ldots, \omega_\ell$ les orbites non réduites à un élément. Soient $x_i \in \omega_i$, alors :

$$|G| = |Z| + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}(x_i)|}$$

Application 12. Le centre d'un p–groupe non trivial n'est pas trivial.

Théorème 13 (Wedderburn)**.** *Soit A un anneau non nul fini dont tous les éléments non nuls sont inversibles (un corps gauche). Alors A est un corps (commutatif).*

Théorème 14 (Cauchy)**.** *Soit G un groupe fini d'ordre n et soit p un facteur premier de n. Alors il existe un élément de G d'ordre p.*

3 Théorèmes de Sylow

Définition 15. Soit G un groupe fini de cardinal $p^\alpha m$ avec $p \nmid m$. On appelle p–Sylow de G un sous-groupe de G de cardinal p^α.

Exemple 16. L'ensemble $\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \text{ et } a_{ii} = 1\}$ est un p–Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$.

Lemme 17. *Soit G un groupe fini de cardinal $p^\alpha m$ avec $p \nmid m$ et $\alpha \geqslant 1$. Soient H un sous-groupe de G et S un p–Sylow. Alors il existe $a \in G$ tel que $aSa^{-1} \cap H$ soit un p–Sylow de H.*

Théorème 18 (Sylow)**.** *Soit G un groupe fini de cardinal $p^\alpha m$ avec $p \nmid m$.*

1. *G continent un p–Sylow, et tout p–groupe de G est contenu dans un p–Sylow.*
2. *Les p–Sylow de G sont conjugués.*
3. *Si n_p est le nombre de p–Sylow, alors $n_p | m$ et $n_p \equiv 1 \pmod p$.*

Application 19. Il n'existe pas de groupes simples d'ordre 63.

4 Formule de Burnside

Définition 20. Soit G agissant sur X. Si $g \in G$, on appelle *fixateur* de g l'ensemble $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$.

Proposition 21 (Formule de Burnside)**.** *Soit G un groupe fini agissant sur X un ensemble fini. On note Ω l'ensemble des classes pour cette action, alors :*

$$|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

Application 22. On veut colorier les côtés d'un rectangle (non carré) et on dispose de deux couleurs différentes (rouge et bleu). À isométrie près, il y a 9 coloriages différents.

5 Le groupe symétrique

Lemme 23. *Soient $a_1, \ldots, a_{n-2}$ et $b_1, \ldots, b_{n-2}$ deux listes d'éléments distincts de $\{1, \ldots n\}$. Alors il existe $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ tel que $\sigma(a_i) = b_i$.*

Proposition 24.

1. *Soit $\sigma = (a_1 \cdots a_k)$ un cycle et $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Alors le conjugué de σ par τ est : $\tau\sigma\tau^{-1} = \big(\tau(a_1) \cdots \tau(a_k)\big)$.*
2. *Dans $\mathfrak{S}_n$, les k–cycles sont conjugués.*
3. *Pour $n \geqslant 5$, les 3–cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.*

Théorème 25. *Pour $n \geqslant 5$, $\mathfrak{A}_n$ est un groupe simple.*

Corollaire 26. *Pour $n \geqslant 5$, le sous-groupe dérivé de $\mathfrak{A}_n$ est $\mathfrak{A}_n$ et pour $n \geqslant 2$, le sous-groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathfrak{A}_n$.*

Corollaire 27. *Pour $n \geqslant 5$, les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{\mathrm{id}\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$.*

Lemme 28. *Si un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ transforme toute transposition en transposition, alors il est intérieur.*

Théorème 29. *Pour $n \neq 6$, les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont tous intérieurs.*

6 Action de Steinitz

Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif et $n, p \in \mathbf{N}^*$.

Définition 30. L'application suivante est une action du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ appelée action de Steinitz.

$$\begin{array}{ccc} \big(\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})\big) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ \big((P,Q), M\big) & \longmapsto & PMQ^{-1} \end{array}$$

On dira que deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont équivalentes si elles sont dans la même orbite pour l'action de Steinitz.

Théorème 31. *Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ de rang r est équivalente à la matrice $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.*

Corollaire 32. *Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont le même rang.*

Proposition 33. *On suppose que $\mathbf{K}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Notons $\mathscr{O}_r$ l'orbite des matrices de rang r. Alors l'adhérence de $\mathscr{O}_r$ est donnée par la réunion disjointe :*

$$\overline{\mathscr{O}_r} = \bigsqcup_{0 \leqslant k \leqslant r} \mathscr{O}_k$$

Corollaire 34. *On suppose que $\mathbf{K}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. L'unique orbite fermée est celle de la matrice nulle $\mathscr{O}_0 = \{0\}$ et l'unique orbite ouverte est $\mathscr{O}_{\min(n,p)}$. En particulier, si $n = p$ alors $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.*

Proposition 35. *Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, les orbites $\mathscr{O}_r$ sont connexes.*

Développements

1. Théorème de Wedderburn. **[13]**
2. Pour $n \neq 6$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$. **[29]**

Références

- Caldero et Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome I.*
- Combes, *Algèbre et géométrie.*
- Cortella, *Théorie des groupes.*
- Perrin, *Cours d'algèbre.*