Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

I) Convergence en norme

1) Convergence en norme infinie

Th 1 : $(\mathbb{L}^\infty(\Omega,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé, complet.

Déf 2 : Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X \in \mathbb{L}^\infty$. On dit que (X_n) converge en norme infinie vers X si $\|X_n - X\|_\infty \to 0$

D V P T ① Exple 3 : Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on définit un polynôme B_n sur $[0;1]$ par $\forall x \in [0,1]$, $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. Alors $B_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|.\|_\infty} f$

Appli 4 : Théorème d'approximation de Weierstrass :
Toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales

Appli 5 : Th des moments de Hausdorff : Soient $X, Y \in \mathbb{L}^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ tq $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(Y^k)$ alors $X \sim Y$

2) Convergence en norme p, $p \in [1;+\infty[$

Th de Riesz-Fischer : $(\mathbb{L}^p(\Omega,\mathbb{R}), \|.\|_p)$ est un espace vectoriel normé complet.

Déf 7 : Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X \in \mathbb{L}^p(\Omega,\mathbb{R})$. On dit que (X_n) converge en norme p vers X si $\|X_n - X\|_p = \mathbb{E}(|X_n - X|^p)^{1/p} \to 0$

Prop 8 : Soient $1 \leq p < q$ alors $\mathbb{L}^\infty \subset \dots \subset \mathbb{L}^q \subset \mathbb{L}^p \subset \dots \subset \mathbb{L}^1$. En particulier $X_n \xrightarrow{\|.\|_p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\|.\|_q} X$

Déf 9 : Soit $(X_i)_{i\in I} \in \mathbb{L}^1(\Omega,\mathbb{R})^I$. On dit que (X_i) est équi-intégrable si $\lim_{a\to+\infty} \sup_{i\in I} \int_{\{|X_i|>a\}} |X_i| d\mathbb{P} = 0$

Prop : Si (X_i) est uniformément bornée par $X \in \mathbb{L}^1$ ie $\forall i \in I$, $|X_i| \leq X$ p.s ; alors (X_i) est équi-intégrable

Th 11 : $(X_i)_{i\in I}$ est équi-intégrable $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A) \leq \eta \Rightarrow \forall i \in I, \int_A |X_i| d\mathbb{P} \leq \varepsilon \\ \exists M \in \mathbb{R}, \forall i \in I, \mathbb{E}(|X_i|) \leq M. \end{cases}$

II) Convergence presque sûre

1) Définitions et critères de convergence

Déf 12 : Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X \in \mathcal{L}^0(\Omega,\mathbb{R})$. On dit que (X_n) converge presque sûrement vers X si
$\exists N \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(N) = 0$ et $\forall w \notin N$, $\lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)$. On note $X_n \xrightarrow{p.s} X$

Prop 13 : La limite presque sûre est unique modulo l'égalité presque partout.

Prop 14 : Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $X_n \xrightarrow{p.s} X$ et $Y_n \xrightarrow{p.s} Y$ alors $f(X_n) \xrightarrow{p.s} f(X)$ et $\lambda X_n + Y_n \xrightarrow{p.s} \lambda X + Y$

Prop 15 : $X_n \xrightarrow{p.s} X \Leftrightarrow \mathbb{P}(w \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)) = 1$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} \{|X_n - X| < \varepsilon\}) = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) = 0$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}} \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) = 0$

Lemme de Borel-Cantelli : Soit $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

1) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors $\mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 0$

2) Si les (A_n) sont indépendants et $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, alors $\mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 1$.

Corollaire 17 : 1') Si $\forall \varepsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < +\infty$, alors $X_n \xrightarrow{p.s} X$

2') Si les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes alors $X_n \xrightarrow{p.s} 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) < +\infty$

Exple 18 : Soit $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ indépendants. $\mathbb{1}_{A_n\,n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{p.s} 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$.

Exple 19 : Une urne contient à la $n^{\text{ième}}$ partie n boules blanches et 1 boule rouge.
On note A_n = "on tire une boule rouge à la $n^{\text{ième}}$ partie" et $Y_n = \mathbb{1}_{A_n}$.
alors $Y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$ et $Y_n \not\xrightarrow{p.s.} 0$.

Exple 20 : Le jeu de quitte ou double.
Au début de la partie, on dispose d'1 €. Si le joueur a gagné les $n-1$ $1^{\text{ères}}$ parties, il double sa mise à la $n^{\text{ième}}$ avec proba $\frac{1}{2}$. Sinon, il est ruiné.
On note X_n la fortune du joueur à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ partie.
alors $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$ et $X_n \not\xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$.

2) Lois des grands nombres

Loi forte des grands nombres (Kolmogorov) :
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{L}^2(\Omega,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ iid alors $\overline{X_n} \xrightarrow{p.s.} m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\overline{X_n} \xrightarrow{\|\cdot\|_1} m = \mathbb{E}(X_1)$

Appli 22 : Soit $X = (X_1,\dots,X_n)$ un n échantillon de loi $\nu \in \mathbb{L}^2$, alors $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur fortement consistant de $\mathbb{E}(X)$,
et $\hat{s}_n^{\,2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_i})^2$ est un estimateur fortement consistant de $\mathbb{V}(X)$.

DVPT ② **Inégalité de Hoeffding :** Soit $(Y_n) \in \mathbb{L}^0(\Omega,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ indépendantes, centrées, tq $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists c_n \geq 0$, $|X_n| \leq c_n$ p.s.
On note $a = a_n = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{a}\right)$

Appli 24 : Soit $X = (X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{B}(\theta)$, alors $\mathbb{P}_\theta(|\overline{X_n} - \theta| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$
Un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ est : $\left[\overline{X_n} - \sqrt{\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)} \,;\, \overline{X_n} + \sqrt{\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}\right]$

DVPT ③ **Th de Glivenko-Cantelli :** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables iid de fonction de répartition F.
On pose $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq t\}}$ alors on a : $\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \xrightarrow{p.s.} 0$

Appli 26 : La fonction de répartition empirique F_n est un estimateur fortement consistant de F

III Convergence en probabilité

1) Définition et métrisabilité

Déf 27 : Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X \in \mathbb{L}^0(\Omega,\mathbb{R})$. On dit que (X_n) converge en probabilité vers X
si $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.

Exple 28 : Soit $(X_n) \in \mathbb{L}^2(\Omega,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ indépendantes centrées tq $\mathbb{V}(X_n) = \sigma^2$, alors $\overline{X_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

Déf-Prop 29 : $\forall X, Y \in \mathbb{L}^0(\Omega,\mathbb{R})$, on pose $d(X,Y) = \mathbb{E}(|X-Y| \wedge 1)$. d est une distance
et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \iff \lim_{n\to\infty} d(X_n, X) = 0$.

2) Liens avec les autres modes de convergence.

Prop 30 : Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. L'exemple 19 montre que la réciproque est fausse.

Th 31 : Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ alors il existe une sous suite telle que $X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{p.s.} X$.

Appli 32 : $(\mathbb{L}^0(\Omega,\mathbb{R}), d)$ est un espace métrique complet.

Prop 33 : Si $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. L'exemple 20 montre que la réciproque est fausse

DVPT ④ **Th de Vitali :** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{L}^1(\Omega,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et X une variable aléatoire réelle.
$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et (X_n) est équi-intégrable
$\iff X \in \mathbb{L}^1(\Omega,\mathbb{R})$ et $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} X$ ie $\lim_{n\to+\infty} \|X_n - X\|_1 = 0$

IV) Convergence en loi

1) Définitions et caractérisations

Lemme Portmanteau : Les assertions suivantes sont équivalentes. Soient $(X_n), X \in \mathbb{L}^0(\Omega, \mathbb{R})$,

(1) En tout point de continuité de $x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$, on a $\mathbb{P}(X_n \leq x) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X \leq x)$.

(2) Pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbb{R}$. $\mathbb{E}(f(X_n)) \longrightarrow \mathbb{E}(f(X))$.

(3) Pour toute fonction f lipschitzienne bornée sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}(f(X_n)) \longrightarrow \mathbb{E}(f(X))$.

(4) Pour toute fonction f continue positive sur $\mathbb{R}$, $\underline{\lim}_{n \to \infty} \mathbb{E}(f(X_n)) \geq \mathbb{E}(f(X))$.

(5) Pour tout U ouvert de $\mathbb{R}$, $\underline{\lim}_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n \in U) \geq \mathbb{P}(X \in U)$.

(6) Pour tout F fermé de $\mathbb{R}$, $\overline{\lim}_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$.

(7) $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, de frontière δB telle que $\mathbb{P}(X \in \delta B) = 0$, $\mathbb{P}(X_n \in B) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X \in B)$.

Déf 36 : Si l'une de ses conditions est vérifiée, on dit que (X_n) converge en loi vers X : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Expl 37 : Si X_n a pour loi $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{\frac{k}{n}}$, alors (X_n) converge en loi vers $X \sim \mathcal{U}([0,1])$.

Rq 38 : Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. La limite X n'est pas unique. Seul sa loi $\mathbb{P}_X$ l'est.

- La convergence en loi n'est pas régulière : $X_n + Y \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y$ n'entraine pas $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Déf 39 : Soit $X \in \mathbb{L}^0$. On pose $\varphi_X : t \mapsto \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mathbb{P}_X$ sa fonction caractéristique, elle caractérise la loi.

Th de Lévy : Soient $(X_n), X \in \mathbb{L}^0$. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall t \in \mathbb{R}, \varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{R}} \varphi_X(t)$.

Appli 41 : Si $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $n p_n \to \lambda > 0$, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P$ où $P \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

2) Liens avec les autres modes de convergence

Prop 42 : Soient $(X_n), X \in \mathbb{L}^0(\Omega, \mathbb{R})$. Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. La réciproque est fausse.
Soit $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$. On pose $X_n = (-1)^n Y$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ mais $X_n \not\xrightarrow{\mathbb{P}} Y$.

Prop 43 : Soit $c \in \mathbb{R}$. On a $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \iff X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$.

Lemme de Slutsky : Soient $(X_n), (Y_n) \in \mathbb{L}^0(\Omega, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telles que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \in \mathbb{L}^0(\Omega, \mathbb{R})$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$
alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$. En particulier $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c$.

3) Applications en statistiques

DVPT 5

Théorème central limite : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{R})$ iid telle que $\mathbb{V}(X_1) = \sigma^2 > 0$
alors $\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X_n} - m}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Appli 46 : Construction d'intervalles de confiances asymptotiques
Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n échantillon de loi $P_\theta \in \mathbb{L}^2$, alors $\sqrt{\frac{n}{\hat{\sigma}_n^2}} \left(\overline{X_n} - \mu(\theta) \right) \to \mathcal{N}(0,1)$
L'intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ est $\left[\overline{X_n} - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} ; \overline{X_n} + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} \right]$

Expl 47 : Calcul approché d'intégrales par la méthode de Monte-Carlo

Appli 48 : Test du χ^2
Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon qui prend ses valeurs dans $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_d\}$
On note $p = (p_1, \dots, p_d)$ la loi commune des X_k. On se donne une loi de ref : p^{ref}
On pose $\hat{p}_{i,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k = x_i\}}$ estimateur consistant, sans biais, des p_i
et $D_n^2(\hat{p}_n, p^{ref}) = n \sum_{i=1}^{d} \frac{(\hat{p}_{i,n} - p_i^{ref})^2}{p_i^{ref}}$ la statistique de Pearson (pseudo-distance du χ^2)
alors : sous $H_0 : p = p^{ref}$, on a $D_n^2(\hat{p}_n, p^{ref}) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \chi^2(d-1)$
Sous $H_1 : p \neq p^{ref}$, on a $D_n^2(\hat{p}_n, p^{ref}) \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} +\infty$

L 262 : Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

Rapport de jury 2017 : Les implications entre les divers modes de convergence, ainsi que les réciproques partielles doivent être connues. Des contre-exemples aux réciproques sont attendus par le jury. Les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite) doivent être énoncés. On peut par ailleurs exiger de connaître au moins l'architecture des preuves. L'étude de maximum et minimum de n variables aléatoires indépendantes et de même loi peut nourrir de nombreux exemples.
Pour aller plus loin, les candidats pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de Borel-Cantelli, les fonctions génératrices,...) ou donner des inégalités de grandes déviations. Enfin, les résultats autour des séries de variables aléatoires indépendantes comme le théorème de Kolmogorov peuvent tout à fait se placer dans cette leçon.

Références :

- *C* Barbe-Ledoux, Probabilité [BL]
- *C* Rivoirard-Stoltz, Statistique mathématique en action [RS]
- *C* Yger, Modélisation L3 [L3M]
- *D* Ouvrard, Probabilités 2 [O2]

Développements :

1. Théorème de Weierstrass [BL]
2. Inégalité de Hoeffding [O2]
3. Théorème de Glivenko-Cantelli [RS]
4. Théorème de Vitali [BL]
5. Théorème central limite [BL]

Commentaires / Suggestions : Implications des divers mode de convergence