Séries de Fourier. Exemples et applications.

(I) Analyse de Fourier sur le tore $\mathbb{T}$

1) Le tore $\mathbb{T}$

Déf 1 : On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ le tore.

Prop 2 : $\mathbb{T}$ est un groupe topologique séparé, compact, connexe et $\mathbb{T} \simeq \mathbb{U}$.

Th 3 : Il existe une unique mesure μ sur $\mathbb{T}$ invariante par translation telque $\mu(\mathbb{T}) = 2\pi$

Prop 4 : $\forall 1 \leq p \leq q \leq \infty$, on a : $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{T}) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \subset \mathbb{L}^\infty(\mathbb{T}) \subset \cdots \subset \mathbb{L}^q(\mathbb{T}) \subset \mathbb{L}^p(\mathbb{T}) \subset \cdots \subset \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$

Déf 5 : On munit $\mathbb{L}^1(\mathbb{T})$ du produit de convolution défini par $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\,g(x-t)\,dt$

Prop 6 : $(\mathbb{L}^1(\mathbb{T}), +, *, \|\cdot\|_1)$ est une algèbre de Banach, non unitaire, commutative.

Rq 7 : On identifie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique avec $\tilde{f} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x + 2\pi\mathbb{Z}) = f(x)$.

2) Polynômes trigonométriques

Déf 8 : On pose : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e_n : x \mapsto e^{inx} \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$;

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = \mathrm{Vect}(e_k)_{-n \leq k \leq n}$ le sev des polynômes trigonométriques d'indice n ;
- $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ le sev des polynômes trigonométriques.

Th de Stone-Weierstrass : Soit (X, d) un espace métrique compact et l'EVN $(\mathcal{C}(X, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.
Si A est une s/s algèbre unitaire de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, qui sépare les points et stable par conjugaison alors A est une partie dense de $(\mathcal{C}(X, \mathbb{C}), d)$.

Corollaire 10 : P est dense dans $(\mathcal{C}(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$. Par suite, $\forall p \in [1, +\infty[$, P est dense ds $(\mathbb{L}^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$.

3) Coefficients de Fourier

Déf 11 : Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$. On définit $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\,e^{-inx}\,dx$ le $n^{\text{ème}}$ coef de Fourier de f.
et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\cos(nx)\,dx$; $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\sin(nx)\,dx$.

Exple 12 : Soit $P \in \mathcal{P}$: $\exists (a_n) \in \mathbb{C}^{(\mathbb{Z})}$ tq $P(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}$, alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(P) = a_n$.

Exple 13 : Soit f la fonction créneau $(f = \mathbb{1}_{]0,\pi[} - \mathbb{1}_{]-\pi,0[})$, alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1-(-1)^n}{i\pi n}$.

Déf 14 : Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$. La série de Fourier de f, notée $\sum c_n(f) e_n$ est la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,e_k$.

Prop 15 : On note $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$ le noyau de Dirichlet, alors $S_n(f) = f * D_n$.

4) Propriétés des coefficients de Fourier

Lemme de Riemann-Lebesgue : Soit $f \in \mathbb{L}^1([-\pi, \pi])$, alors $\lim_{|n| \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx = \lim_{|n| \to \infty} c_n(f) = 0$

Prop 16 : Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$, alors $c_n(f^{(k)}) = (in)^k \cdot c_n(f)$, ainsi $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Prop 17 : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$, $|c_n(f)| \leq \|f\|_1$.

Déf 18 : On définit $\mathcal{F} : (\mathbb{L}^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \|\cdot\|_\infty)$
$$f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$$

Prop 19 : $\mathcal{F}$ est un morphisme d'algèbres, continue de norme 1

II) Théorie L^2 des séries de Fourier

1) L'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$

Déf 20 : on définit sur $L^2(\mathbb{T})$ un produit hermitien en posant $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$

Th 21 : $(L^2(\mathbb{T}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace de Hilbert, et $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en est une base hilbertienne.

Rq 22 : $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$ et $\|S_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2$

Inégalité de Bessel : $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $S_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur $\mathcal{P}_n$.
donc $\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + d(f, \mathcal{P}_n)^2$. En particulier, $\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2$

2) Théorème de convergence en moyenne quadratique

Formule de Parseval : $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2$.

Corollaire 24 : $\mathcal{F}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{T})$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Appli 25 : En appliquant à la fonction créneau, $\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Appli 26 : **Inégalité de Wirtinger :** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ tq $c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt = 0$,
alors $\|f\|^2 \leqslant \|f'\|^2$ avec égalité ssi $f(x) = a e^{ix} + b e^{-ix}$

Appli 27 : **Inégalité isopérimétrique :** Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ une courbe de Jordan $\mathcal{C}^1$ par mx
de longueur L et enfermant une surface S. Alors $L^2 \geqslant 4\pi S$
avec égalité ssi γ est un cercle (parcouru une fois).

Th de convergence en norme $\|.\|_2$: Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, alors $S_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{\|.\|_2} f$.

III) Théorie $\mathcal{C}^0$ des séries de Fourier

1) Exemples pathologiques

Exple 29 : Soit $m \in 2\mathbb{N}$, $m \geqslant 6$. La série de Fourier lacunaire $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(m^n \pi x)}{2^n}$
a pour somme une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle part dérivable.

Appli 30 : L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, nulle part dérivable est dense ds $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\infty)$

Th de Banach-Steinhaus : Soient E Banach, F un EVN et $H \subset \mathcal{L}_c(E,F)$.
Alors : ou bien $(|||f|||)_{f\in H}$ est bornée, ou bien $\exists x \in E$ tq $\sup_{f\in H} \|f(x)\| = +\infty$

Appli 32 : Il existe des fonctions continues qui ne sont pas somme de leur série de Fourier

Exple 33 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie par $\forall x \in [0,\pi]$, $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin((2^{p^3}+1)x)}{p^2}$
f est continue sur $\mathbb{R}$ mais sa série de Fourier diverge en 0.

2) Convergence au sens de Césaro.

Déf 34 : Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. on définit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f) \in \mathcal{P}_n$

DVPT 1

Prop 35 : On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k$ le noyau de Fejer.
On a : $\sigma_n(f) = f * K_n$; $K_n \geqslant 0$, $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_n(x)\,dx = 1$, $K_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$

Théorème de Fejer : $\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, $\sigma_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{\|.\|_\infty} f$ ie $\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0$

Appli 37 : Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et $x_0 \in \mathbb{T}$. Si $S_n(f)(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in \mathbb{R}$ alors $l = f(x_0)$.

Th d'approximation de Weierstrass, version trigonométrique :
Toute fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

D V P T ② Appli 39 : Théorème d'équirépartition de Weyl : Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$.
(u_n) est équirépartie (ie $\forall\, 0 \leq a < b \leq 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \mathrm{Card}(k \in [\![1,n]\!], u_k \in [a,b]) = b-a$)
$\iff \forall f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)\,dt$
$\iff \forall p \in \mathbb{Z}^*$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p \cdot u_k} = 0$: critère de Weyl

Th de Fejér-Lebesgue : Soit $p \in [1;+\infty[$ et $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{T})$, alors $\|\sigma_n(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\sigma_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_p} f$

Appli 41 : L'application $\mathcal{F} : \mathbb{L}^1(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est injective

3) Théorème de convergence normale

Th de convergence normale : Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \cap \mathcal{C}^1_{mx}(\mathbb{T})$, alors $S_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} f$
En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx}$

Appli 43 : Équation de la chaleur : Soit $L > 0$, $h \in \mathcal{C}([0,L]) \cap \mathcal{C}^1(]0,L[)$.
L'EDP $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0, & t \geq 0, x \in]0,L[\\ u(t,0) = u(t,L) = 0, & t > 0 \\ u(0,x) = h(x), & x \in [0,L] \end{cases}$ admet une solution u de la forme
$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$
où $(a_n) \in \ell^1(\mathbb{N}^*)$

D V P T ③ Formule sommatoire de Poisson : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tq $f(x) \underset{\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) \underset{\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$
Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\, e^{inx}$

Appli 45 : On pose $\theta : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $s \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s}$ la fonction θ de Jacobi
alors θ vérifie l'équation fonctionnelle : $\forall s > 0$, $\theta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\, \theta\left(\frac{1}{s}\right)$

IV Théorie ponctuelle des séries de Fourier

1) Convergence simple

Déf 46 : Soit $f \in \mathcal{C}_{mx}(\mathbb{T})$. On définit sa régularisée f^* : $x \mapsto \frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+} f(x+\varepsilon) + \lim_{\varepsilon\to 0^-} f(x+\varepsilon)\right)$

Th de Dirichlet : Soit $f \in \mathcal{C}^1_{mx}(\mathbb{T})$, alors $\forall x \in \mathbb{T}$, $\lim_{x\to+\infty} S_n(f)(x) = f^*(x)$

Appli 48 : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$

Déf 49 : La fonction $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$ est DSE en 0. On pose $\forall z \in D(0, 2\pi)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \cdot \frac{z^n}{n!}$.

D V P T ④ Appli 50 : $\forall k \in \mathbb{N}^*$; $\zeta(2k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!}\, b_{2k} \in \pi^{2k}\mathbb{Q}$.

2) Convergence presque-partout

Th de Carleson [ADMIS] : Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ alors f est limite presque partout de sa série de Fourier

Th de Kolmogorov-Zeller : Il existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que la série de Fourier de f ne converge en aucun point vers f.