205

Espaces complets. Exemples et applications.

I) Espace métrique complet

Soient (X,d), (Y,d') deux espaces métriques et $A \subset X$, $(A \neq \emptyset)$.

1) Suite de Cauchy

Déf 1 : On dit qu'une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, d(x_p, x_q) < \varepsilon$

Prop 2 : Toute suite de Cauchy est bornée.

Prop 3 : Une suite de Cauchy possède au plus une valeur d'adhérence.
Si elle en possède une, elle converge vers celle-ci.

Prop 4 : Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Appli 5 : La série harmonique, de terme général $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, diverge.

2) Espace et partie complète

Déf 6 : On dit que (X,d) est complet si toute suite de Cauchy de X est convergente.

Exple 7 : $(\mathbb{R}, |.|)$ et $(\mathbb{C}, |.|)$ sont des espaces métriques complets.

Exple 8 : Si, X est un ensemble quelconque, alors $(\mathcal{B}(X,\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ est complet.

Déf 9 : On dit que la partie $A \subset X$ est complète lorsque (A, d_A) est complet.

Exple 10 : $\mathbb{Z}$ est complet.

Prop 11 : Si A est complet alors A est fermée dans X.

Exple 12 : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^*$ ne sont pas complets.

3) Propriétés des espaces complets

Prop 13 : Soit (X,d) un espace métrique complet. Tout fermé F de X est complet.

Exple 14 : Soit K un espace compact, alors $(\mathcal{C}(K,\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ est complet.

Prop 15 : Si (X,d) et (Y,d') sont isométriques, X est complet $\Leftrightarrow$ Y est complet.

Th 16 : Soit $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'espaces complets, alors $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est complet

Exple 17 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets.

Exple 18 : Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n \text{ et } d(z, {}^c\Omega) \geq \frac{1}{n}\} \subset \Omega$
On considère : $\forall f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $p_n(f) = \sup_{z\in K_n} |f(z)|$ et $\delta(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$,
alors $(\mathcal{H}(\Omega), \delta)$ est un espace métrique complet, et δ est la distance de la CVU sur tout compact.

Exple 19 : L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un espace métrisable complet.

4) Compacité et complétude

Th 20 : Soit $A \subset X$. A est compacte $\Leftrightarrow$ A est précompacte et complète.

Appli 21 : Th de Tychonov : Soit $(K_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ espaces compacts, alors $\prod_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est compact

Appli 22 : Th d'Ascoli : Soient K espace compact (Y, d') espace complet et $A \subset \mathcal{C}(K, Y)$.
A est équicontinue et bornée $\Leftrightarrow$ A est relativement compacte.

D **Th de Montel :** Soit $A \subset \mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$. A est localement bornée $\Leftrightarrow$ A est relativement compacte

1 **Def 23 :** On dit que A est localement bornée si $\forall K$ compact de Ω, $\exists M_K > 0, \forall z \in K, \forall f \in A, |f(z)| \leq M_K$.

II) Théorèmes fondamentaux sur la complétude

(X,d) et (Y,d') désignent 2 espaces métriques, A une partie non vide de X et $a \in \bar{A}$.

1) Problèmes de limites

Critère de Cauchy : Soit $f : A \to Y$ avec Y complet
alors f possède une limite en a $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in X, d(x,a) < \alpha, d(y,a) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Appli 26 : Soit $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. $\int_0^\infty h(u)\,du$ converge $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists t \geq 0, \forall x, y \geq t, \left| \int_x^y h(u)\,du \right| < \varepsilon$

Th de la double limite : Soit $f_n : A \to Y$ avec Y complet, et $f : A \to Y$ tels que :
(f_n) converge uniformément vers f sur A et $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n possède une limite α_n en a,
alors f possède une limite α lorsque x tend vers a, ie $\lim\limits_{x \to a} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$.

Appli 28 : On définit sur $]1, +\infty[$ la fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, alors $\lim\limits_{s \to \infty} \zeta(s) = 1$.

2) Prolongement des fonctions uniformément continues

Th de prolongement : Soient $f : A \to Y$ uniformément continue, A dense dans X et Y complet
alors il existe une unique application $g : X \to Y$ uniformément continue telle que $g_{|A} = f$.

Appli 30 : Extension de l'intégrale de Riemann aux fonctions réglées $\mathcal{R}([a,b]) = \overline{\mathcal{E}sc([a,b])}^{\|\cdot\|_\infty}$.

Déf 31 : On appelle complété de X tout espace métrique complet $(\hat{X}, \hat{d})$
tel qu'il existe une isométrie de X sur une partie dense de $\hat{X}$.

Th 32 : Tout espace métrique possède un complété, unique à isométrie près.

Exple 33 : $\forall p \in \mathbb{P}$, on note $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ pour la norme p-adique

3) Théorème du point fixe (de Banach-Picard)

Th du point fixe : Soit $f : X \to X$ contractante, avec X complet,
alors f possède un unique point fixe $\bar{x}$, et toute suite, de fonction itérative f, converge vers celui-ci.

Appli : **Th de Cauchy-Lipschitz, forme locale** : Soient U ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $(t_0, x_0) \in U$,
Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la 2^nde^ variable,
alors il existe une unique solution locale au problème de Cauchy $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Appli : **Th d'inversion locale** : Soient U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ tq $Df_a \in GL_n(\mathbb{R})$,
alors il existe un ouvert V contenant a, un ouvert W contenant $f(a)$ tq $f_{|V}$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur W

Appli : **Th des fonctions implicites** : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$
On suppose que $f(a,b) = 0$ et $D_y f_{(a,b)} \in GL_p(\mathbb{R})$, alors il existe :
V voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, W voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$ tels que $V \times W \subset U$
et $\varphi \in \mathcal{C}^1(V, W)$ tq : $x \in V, y \in W$ et $f(x,y) = 0 \iff x \in V$ et $y = \varphi(x)$.

4) Théorème de Baire

Lemme d'intersection de Cantor : (X,d) est complet si et seulement si
Pour toute suite (F_n) décroissante de fermés non vide de E tq $\text{diam}(F_n) \to 0$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

Th de Baire : Si X est complet, alors pour toute suite $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts denses de X, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ est dense dans X

Appli 40 : Soit E un espace vectoriel normé à base algébrique dénombrable,
alors il n'existe aucune norme qui le rende complet.

DV 2 **Appli 42** : On note A l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, nulle part dérivables,
alors A est une partie dense de $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Th de la limite simple de Baire : Soient X complet et $(f_n) \in \mathcal{C}(X, Y)^{\mathbb{N}}$.
Si (f_n) converge simplement vers f, alors f est continue sur une partie dense de X.

Exple 43 : La fonction $1_{\mathbb{Q}}$ ne peut pas être limite simple d'une suite de fonctions continues

III) Espaces de Banach

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Définitions et exemples

Déf 44 : On dit que E est un espace de Banach si l'espace métrique associé est complet.

Exple 45 : Les espaces vectoriels de dimension finie (pour n'importe quelle norme) sont des Banach.

Exple 46 : $(\mathcal{B}(X,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ et $(\mathcal{C}(K,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ sont des algèbres de Banach.

DVPT 3

Prop 47 : E est un espace de Banach $\Leftrightarrow$ toute série de E absolument convergente est convergente.

Th de Riesz-Fischer : Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.
$\forall p \in [1, +\infty]$, $(\mathbb{L}^p(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Exple 49 : $\forall p \in [1, \infty]$, $\ell^p(\mathbb{N}) := \mathbb{L}^p(\mathbb{N}, m)$ et $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}) := \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \lambda)$ sont des Banach.

Prop 50 : Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est un Banach, alors $(\mathcal{L}_c(E,F), \|\!|\cdot\|\!|)$ est un espace de Banach.

Exple 51 : $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est un espace de Banach.

2) Conséquences du théorème de Baire

Th de la borne uniforme : Soient E un Banach et $(T_i)_{i \in I}$ famille d'opérateurs continus de E dans F,
alors : . soit $\exists M \geq 0$ tq $\forall i \in I$, $\|\!|T_i\|\!| \leq M$
. soit $\exists\ u \in E$ tq $\sup_{i \in I} \|T_i(u)\|_F = +\infty$

Appli 53 : Il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ qui ne sont pas somme de leur série de Fourier

Appli 54 : Soit E un Banach et $(T_n) \in \mathcal{L}_c(E,F)^{\mathbb{N}}$ tq $T_n \xrightarrow{CVS} T$, alors $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$.

Th de l'application ouverte : Soient E, F deux Banach et $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$ surjective, alors T est ouverte

Appli 56 : La transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

Coro : Th d'isomorphisme : Soient E, F deux Banach et $T : E \to F$ linéaire continue bijective
alors $T^{-1} \in \mathcal{L}_c(E,F)$. Ainsi, T est un isomorphisme d'espaces de Banach.

Appli 58 : Si E est un Banach pour deux normes comparables, alors elles sont équivalentes

3) Espaces de Hilbert

Déf 59 : Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien.
On dit que H est un espace de Hilbert s'il est complet pour la distance associée à $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Exple 60 : $\mathbb{K}^n$, $\ell^2(\mathbb{N})$, $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$, $L^2(\mathbb{R})$ sont des espaces de Hilbert pour leur produit scalaires usuels

DVPT 4

Th de Fourier-Plancherel : $\forall f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, on a $\frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2$, d'où $\hat{f} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$,
Ainsi, la transformée de Fourier sur $\mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^2$ se prolonge en un unique opérateur continu de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, encore noté $\mathcal{F}$, qui est une isométrie à une constante près.

Th de projection sur un convexe fermé : Soit H un espace de Hilbert et C convexe fermé.
$\forall x \in H$, $\exists!\, y = P_C(x) \in H$ tel que $\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$.
De plus, $P_C(x)$ est caractérisé par : $\forall z \in C$, $\mathrm{Re}(\langle z - x, P_C(x) - x\rangle) \leq 0$

Appli 63 : Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé, $\mathcal{B}$ sous tribu de $\mathcal{A}$ et $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$
alors $\exists!\, Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \in \mathbb{L}^0(\Omega)$, $\mathcal{B}$-mesurable tq $\forall B \in \mathcal{B}$, $\int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{B})(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_X d\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) 1\!\!1_B) = \mathbb{E}(X 1\!\!1_B)$

Th de Représentation de Riesz : $\forall f \in H'$, $\exists!\, a \in H$ tq $\forall x \in H$, $f(x) = \langle x, a\rangle$