Utilisation de la notion de compacité

Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques.

(I) Passage du local au global

1) Parties essentiellement finies

Déf 1 : On dit que X est compact si de tout recouvrement d'ouverts de X, on peut extraire un sous recouvrement fini.

Exples 2 : Toute partie finie est compacte.
Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tq $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$, alors $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_\infty\}$ est compacte
$\forall a<b \in \mathbb{R}$, $[a,b]$ est compact. En revanche, $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

2) Fonctions continues sur un compact

Th 3 : Soit X compact, alors tte fonction continue $f : X \to Y$ est bornée.

Th de Heine : Soit X compact, alors toute fonction continue $f : X \to Y$ est uniformément continue

DVPT 1 **Appli 5 :** **Th d'approximation de Weierstrass** : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue,
On définit, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, un polynôme B_n sur $[0,1]$ par $\forall x \in [0,1]$, $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$
alors $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0;1]$.

DVPT 2 **Appli 6 :** **Th de Fejèr** : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue, 2π-périodique,
On définit, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, un polynôme trigonométrique par $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=-k}^{k} c_l(f) e^{ilx}$
alors $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Th de Dini : Soient (f_n) une suite croissante de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers une fonction f continue, alors la convergence est uniforme.

3) Espace des fonctions continues sur un compact.

Ici, X désigne un espace métrique compact contenant au moins deux éléments.

Prop 8 : $(\mathcal{C}(X,\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ est une algèbre de Banach.

Lemme 9 : Soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ réticulée et tq $\forall x_1, x_2 \in X$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\exists u \in \mathcal{H}$ tq $u(x_1) = \alpha_1$ et $u(x_2) = \alpha_2$
alors $\mathcal{H}$ est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

Th de Stone-Weierstrass, cas réel : Toute sous algèbre A de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ séparante et contenant les constantes est une partie dense de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

Exple 11 : L'ensemble des fonctions continues, affines par morceaux est une partie dense de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$

Th de Stone-Weierstrass, cas complexe : Toute sous algèbre A de $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ séparante, stable par conjugaison et contenant les constantes est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

Déf 13 : On dit que $A \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ est équicontinue si $\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x,y \in X, \forall f \in A, d(x,y)<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Th d'Ascoli : Soit $A \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{K})$. A est compacte si et seulement si A est équicontinue et $\forall x \in X$, $A(x)$ est compacte.

II) Résultats d'existence

1) Caractérisation séquentielle

Th de Bolzano-Weierstrass : X est compact si et seulement si de toute suite bornée de X, on peut extraire une sous suite convergente.

DV 3 **Exple 16 :** L'ensemble A des fonctions continues sur $[0,1]$, nulle part dérivables est une partie dense de $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. En particulier, de telles fonctions existent.

Th de Riesz : Un espace vectoriel normé est de dimension finie $\Leftrightarrow$ sa boule unité fermée est compacte.

Appli 18 : En dimension finie, toute les normes sont équivalentes.

2) Convergence dans un compact.

Prop 19 : Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un compact. Si (x_n) possède au plus une valeur d'adhérence, elle converge vers celle-ci.

DV 4 **Appli 20 :** L'application
$$\begin{array}{rcl} \exp : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \\ S & \mapsto & \exp(S) \end{array}$$
est un homéomorphisme

DVPT 5 **Appli 21 : Décomposition polaire :**
L'application
$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \times U_n(\mathbb{C}) & \to & GL_n(\mathbb{C}) \\ (H, Q) & \mapsto & HQ \end{array}$$
est un homéomorphisme

3) Optimisation de fonctions

Th 22 : Soit X compact et $f : X \to \mathbb{R}$ continue,
alors f est bornée et atteint ses bornes : $\exists x_1 \in X$ tq $\min_{x \in X} f(x) = f(x_1)$

Appli 23 : Th de Rolle : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Appli 24 : Une fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions en escalier (donc intégrable)

Appli 25 : Th spectral : Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint.
Alors f est diagonalisable dans une BON, et ses valeurs propres sont réelles.

Lemme : Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $A \neq B$ alors $\forall t \in]0,1[$, $\det(tA + (1-t)B) > (\det A)^t . (\det B)^{1-t}$.

DV 6 **Exple 27 :** Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$,
alors il existe un unique ellipsoïde de volume minimal centré en 0, contenant K.

Déf 28 : On dit que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est coercive si $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$.

Th 29 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue coercive, alors $\exists x_1 \in \mathbb{R}^n$ tq $\min_{x \in X} f(x) = f(x_1)$.

Appli 30 : Th de D'Alembert-Gauss : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant,
alors P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
Par suite, $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

4) Théorèmes de point fixe

Th 31 : Soit X compact et $f : X \to X$ telle que $\forall x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$, alors f admet un unique point fixe $\bar{x}$ sur X, et $\forall x_0 \in X$, $\lim_{n\to\infty} f^{[n]}(x_0) = \bar{x}$.

Th de Brouwer : Soit $f : \overline{B(0,1)} \to \overline{B(0,1)}$ continue, alors f admet un point fixe.

III) Utilisation de la compacité en analyse complexe

1) L'espace des fonctions holomorphes.

Soit Ω un ouvert (non vide) de $\mathbb{C}$.

Prop 33 : $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel topologique pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Déf 34 : On dit que $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de compact de Ω si :
$\cdot\ \forall n \in \mathbb{N}$, K_n est compact ; $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$; $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} K_n$

Expl 35 : On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_n = \{ z \in \mathbb{C},\ d(z, {}^c\Omega) \geq \frac{1}{n} \}$. (K_n) suite exhaustive de compacts

Th 36 : On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall f \in \mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$, $p_n(f) = \sup\limits_{z\in K_n} |f(z)|$. p_n semi-norme
et $\forall f, g \in \mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$, $\delta(f,g) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$. δ distance, invariante par translation
$(\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C}), \delta)$ est un espace complet et δ est la distance de la CVU sur tout compact

Déf 37 : On dit que $A \subset \mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$ est localement bornée
si $\forall K$ compact de Ω, $\exists M_K > 0$, tq $\forall x \in K$, $\forall f \in A$, $|f(z)| \leq M_K$.

DV ⑦ **Th de Montel** : Soit $A \subset \mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$.
A est localement bornée $\Leftrightarrow$ A est relativement compacte dans $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$.

2) Applications du th des familles normales

Th de Cartan : Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega, \Omega)$ tq $f(a) = a$.
Alors : $|f'(a)| \leq 1$ et $|f'(a)| < 1 \Rightarrow f^{[n]} \to \gamma_a : z \mapsto a$.

Automorphismes de $\mathbb{D}$: On pose $\forall a \in \mathbb{D}$, $\forall u \in \mathbb{U}$, $\varphi_{a,u}(z) = u \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, alors $\mathrm{Aut}\,\mathbb{D} = \{\varphi_{a,u}, a \in \mathbb{D}, u \in \mathbb{U}\}$

Th de l'application conforme : Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$ simplement connexe, $\Omega \neq \mathbb{C}$, alors Ω est conformément équivalent au disque unité $\mathbb{D}$.

IV) Etude des équations différentielles

Th de Cauchy-Péano : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ continue et $(t_0, y_0) \in I \times U$.
alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une solution locale (y, J)

Th des bouts : Soit $f : I \times U \to U$ continue, localement lipschitz par rapport à la 2^{nde} variable
On considère (y, J) la solution maximale d'un problème de Cauchy.
Si $\sup J \in I$, alors y sort de tout compact de U au voisinage de $\sup J$.
ie $\forall K$ compact, $K \subset \Omega$, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall t \in]\sup J - \varepsilon ; \sup J[$, $y(t) \notin K$.