Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

E désigne un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On note E^* son dual.

I Formes quadratiques réelles

1) Formes bilinéaires symétriques

Déf 1 : On appelle forme bilinéaire symétrique sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que : • $\forall y \in E$, $x \mapsto \varphi(x,y)$ et $\forall x \in E$, $y \mapsto \varphi(x,y)$ soient linéaires
• $\forall x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

On note $\mathcal{S}_2(E)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes linéaires symétriques sur E.

Exples 2 : • $\forall (\ell_1, \ell_2) \in E^{*2}$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}(\ell_1(x)\ell_2(y) + \ell_1(y)\ell_2(x)) \in \mathcal{S}_2(E)$
• $\forall A \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$, $\forall (\ell_i)_{1 \le i \le p} \in E^{*p}$, $(x,y) \mapsto \sum_{1 \le i,j \le p} a_{i,j}\, \ell_i(x) \ell_j(y) \in \mathcal{S}_2(E)$

Déf 3 : On appelle forme quadratique sur E toute application $q : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x,x)$ avec $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$.
On note $Q(E)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes quadratiques sur E.

Th 4 : Soit $q \in Q(E)$, alors $\exists!\, \varphi \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ appelée forme polaire de q tq $\forall x \in E, q(x) = \varphi(x,x)$.

Identités de polarisation : $\forall x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$

Exple 6 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ le $\mathbb{R}$-ev associé,
La variance $\mathbb{V} : X \mapsto \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$ est une forme quadratique, de forme polaire la covariance

Exple 7 : Soient U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. On a : $d^2 f_a = d(df)_a \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,\mathbb{R})) \simeq \mathcal{L}_2(E)$
alors, par le th de Schwarz, $(h,k) \mapsto d^2 f_a(h,k) \in \mathcal{S}_2(E)$ et $x \mapsto d^2 f_a(x,x) \in Q(E)$

Prop 8 : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ et $\forall x, y \in E$, $q(x+y) = q(x) + 2\varphi(x,y) + q(y)$

Prop 9 : On a l'isomorphisme d'espaces vectoriel : $\mathcal{S}_2(E) \simeq Q(E)$. En particulier, $\dim(Q(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$

2) Représentation matricielle des formes quadratiques

Déf 10 : La matrice d'une forme quadratique q dans $\mathcal{B}$, de partie polaire φ, est $A = (\varphi(e_i, e_j))$

Th 11 : Soit $q \in Q(E)$ de matrice représentative A, alors $\forall x, y \in E$, $q(x) = {}^t x . A . x$

Formule de changement de bases : Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. On note $A_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(q)$ et $A_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(q)$. Alors $A_2 = {}^t P . A_1 . P$

Déf 13 : Soit $q \in Q(E)$ de matrice représentative dans $\mathcal{B}$: $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$.
On note : • $\Delta_{\mathcal{B}}(q) = \det(A)$ le discriminant (dans la base $\mathcal{B}$) de q
• $\mathrm{rg}(q) = \mathrm{rg}(A)$ le rang de la forme quadratique q
On dit que q est non dégénérée si $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Exple 14 : $q : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(A^2)$ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non dégénérée, de rang $\mathrm{rg}(q) = n^2$.

3) Produit scalaire

Soit $q \in Q(E)$ de forme polaire φ

Déf° 17 : On dit que q est positive si $\forall x \in E, q(x) \geqslant 0$. On note $Q^+(E)$ les formes quadratiques $\geqslant 0$

On dit que q est définie positive si $\forall x \in E \setminus \{0\}, q(x) > 0$. On note $Q^{++}(E)$ les formes quadratiques définies positives.

Inégalité de Cauchy-Schwarz :
Soit $q \in Q^+(E)$, $\forall x, y \in E$: $|\varphi(x,y)| \leqslant \sqrt{q(x)} \cdot \sqrt{q(y)}$

Inégalité de Minkowski : Soit $q \in Q^+(E)$, $\forall x, y \in E$, $\sqrt{q(x+y)} \leqslant \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$

Corollaire : Soit $q \in Q^{++}(E)$, alors $\sqrt{q}$ est une norme sur E, de produit scalaire associé φ.

Lemme 19 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $Sp(A) \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$, alors $\exists c > 0, \exists a > 0, \forall t \geqslant 0, \|e^{tA}\| \leqslant c \cdot e^{-at} \|x\|$.

DVPT 1 **Th de Stabilité de Liapounov :** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tq $f(0) = 0$ et $Sp(Df_0) \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$
alors l'origine est un point d'équilibre attractif du système $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{cases}$

II Réduction des formes quadratiques

1) Classification des formes quatratiques réelles

Réduction de Gauss : Soit $q \in Q(E)$, non nulle, de rang $r \in [\![1; n]\!]$.
alors $\exists (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant r} \in \mathbb{R}^r$; $\exists (l_i)_{1 \leqslant i \leqslant r} \in E^{*r}$ indépendantes tq $\forall x \in E$, $q(x) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j l_j^2(x)$

Exple 23 : On a : $q(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 2(xy + yz + xz) = -(x+y+z)^2 + (y+z)^2 - (y-z)^2$

Exple 24 : Soit $q : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto tr(M^2)$ et $M = (x_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$
alors $q(M) = \sum_{i=1}^{n} x_{ii}^2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_{ij} + x_{ji})^2 - \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_{ij} - x_{ji})^2$.

Corollaire 25 : Soit $A = Mat_{\mathcal{B}}(q)$, alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = {}^tP D P$ avec $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

Loi d'inertie de Sylvester : Il existe un unique couple $(s,t) \in \mathbb{N}^2$, appelée signature de q, telle que pour toute base (e_i) qui diagonalise q, $s = \mathrm{Card}\{e_i : q(e_i) > 0\}$, $t = \mathrm{Card}\{e_i : q(e_i) < 0\}$.
De plus, $s + t = rg(q)$.

Corollaire : Si $sgn(q) = (s,t)$ alors $\exists (l_j) \in (E^*)^{s+t}_{indep}$ tq $q = \sum_{j=1}^{s} l_j^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} l_j^2$ et $A = {}^tP \begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P$

DVPT 2 **Réduction des formes quadratiques, version différentielle :**
Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$, alors $\exists \mathcal{V}$ voisinage de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathcal{V}, GL_n(\mathbb{R}))$ tq $\forall A \in \mathcal{V}$, $A = {}^t(\rho(A)) \cdot A_0 \cdot \rho(A)$.

Application 29 : Les matrices symétriques de signature donnée forment un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$

DVPT 2 **Lemme de Morse :** Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ tq $0 \in U$ et $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R})$ tq $df_0 = \tilde{0}$
et $d^2 f_0$ est non dégénérée et que $\mathcal{E}(d^2 f_0) = (p, n-p)$.
Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre 2 voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tq $\varphi(0) = 0$, et en posant $u = \varphi(x)$, $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$.

2) Formes quadratiques sur un espace euclidien

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien dont $\mathcal{B}$ est une base orthonormée

Th spectral : $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tq $A = {}^tP \cdot D \cdot P$

Th de pseudo-réduction simultanée : Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n^{+}(\mathbb{R})$ alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists D \in D_n(\mathbb{R})$ tq $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$

Appli 33 : Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $B \in S_n(\mathbb{R})$, $\forall t \in]0,1[$, $\det(tA+(1-t)B) \geq (\det A)^t . (\det B)^{1-t}$

DVPT 3 **Th 34** : Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$.
Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

Appli 35 : Soit G un sous groupe compact de $GL(E)$, alors $\exists q \in Q^{++}(E)$ tel que $G \subset O(q) := \{u \in GL(E) : q \circ u = q\}$

III Coniques

1) Définition

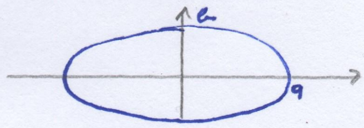
Déf 36 : On appelle conique du plan toute courbe Γ définie par une équation de la forme : $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + k = 0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$
ie $q(x,y) + \ell(x,y) + k = 0$ $\quad q \in Q(\mathbb{R}^3)$, $\ell \in (\mathbb{R}^3)^*$

Th 37 : Si $M \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ est un point régulier de Γ, alors la tangente en ce point a pour équation : $ax_0x + b(x_0y + xy_0) + cyy_0 + d(x+x_0) + e(y+y_0) + k = 0$

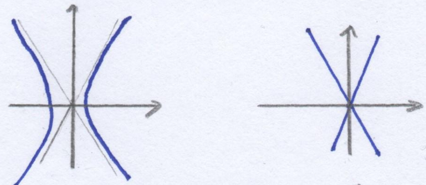
2) Classification des coniques

Soit q la partie quadratique d'une conique Γ contenant au moins 2 points. quitte à opposer l'équation, on peut supposer $sgn(q) \in \{(2;0) ; (1,1) ; (1,0)\}$

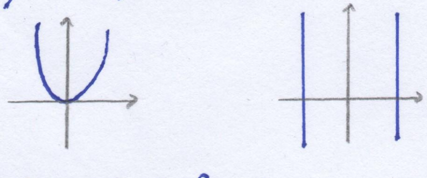
Th 38 : • Si $sgn(q) = (2,0)$, alors Γ est une ellipse et dans un repère adapté : $\Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



• Si $sgn(q) = (1,1)$, alors Γ est une hyperbole, éventuellement dégénérée en 2 droites sécantes et dans un repère adapté : $\Gamma : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



• Si $sgn(q) = (1,0)$ alors Γ est une parabole qui peut dégénérer en 1 ou 2 droites parallèles et dans un repère adapté : $\Gamma : y = ax^2$



Appli 39 : Soit $d \in \mathbb{N}$, sans facteurs carrés, $d \geq 2$ et $\mathcal{H} : x^2 - dy^2 = 1$
On définit une loi de composition interne sur $\mathcal{H}$ avec :
pour $M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$, pour $M' \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$, on pose $M * M' \begin{vmatrix} xx' + dyy' \\ xy' + x'y \end{vmatrix}$

Th 40 : Il existe une solution fondamentale $x_1 = X_1 + \sqrt{d}\, Y_1$ solution de l'équation de Pell-Fermat $X^2 - dY^2 = 1$ tel que l'ensemble des solution soit $\{\pm x_1^n, n \in \mathbb{Z}\}$

3) Quadriques

Déf 41 : Soit $q \in Q(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ et $\ell \in (\mathbb{R}^3)^*$. On appelle quadrique de l'espace toute surface Σ définie par une équation : $q(x,y,z) + \ell(x,y,z) = k \in \mathbb{R}$.

Th 42 : Si $rg(q) = 3$; si $sgn(q) = (3,0)$ Σ est un ellipsoïde
si $sgn(q) = (2,1)$, Σ est une hyperboloïde à 1 nappe, 2 nappes ou un cône