Sous espace stable par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I. Sous espace stable par un endomorphisme

F désigne un sous espace vectoriel de E

1) Definition et exemples.

Def 1: On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$ ie $\forall x \in F, u(x) \in F$.

Ex 2: $\{0_E\}$, E, $\ker u$, $\mathrm{Im}\, u$ sont des sev stables par u

Prop 3: Si F et G sont stables par u alors $F+G$ et $F \cap G$ aussi

Prop 4: Tous les sev sont stables par $u \Leftrightarrow u$ est une homothétie

2) Endomorphisme induit

Def 5: Si F est stable par u, alors $u_{|F}$ définit un endomorphisme appelé endom induit

Prop 6: Si F est stable par u et $v \in \mathcal{L}(E)$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall P \in \mathbb{K}[X]$.

F est stable par : λu ; $u+v$; $u \circ v$; $P(u)$

De plus $(\lambda u)_F = \lambda u_F$; $(u+v)_F = u_F + v_F$; $(u \circ v)_F = u_F \circ v_F$; $(P(u))_F = P(u_F)$

Prop 7: Si F est stable par u, alors $\ker(u_F) = \ker u \cap F$ et $\mathrm{Im}(u_F) = \mathrm{Im}\, u \cap F$

3) Caractérisation matricielle.

Prop 8: F est stable par $u \Leftrightarrow$ Dans toute base B de E, obtenue par complétion d'une base B_F de F, on a $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A = \mathrm{Mat}_{B_F}(u_F)$

Cor 9: Si $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ avec E_i sev de E, muni de bases B_i ; on note $B = \bigcup_{i=1}^{m} \{B_i\}$

On a $\forall i \in [\![1, m]\!]$, E_i stable par $u \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_m \end{pmatrix}$ avec $A_i = \mathrm{Mat}_{B_i}(u_{E_i})$

Def 10: on note χ_u (resp m_u) le polynôme caractéristique de u (resp minimal)

Prop 11: Si F est stable par u alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$

Cor 12: χ_u est irréductible $\Rightarrow u$ n'a pas de sev stable non trivial

Prop 13: Tout $\mathbb{R}$-ev admet au moins une droite ou un plan vectoriel stable
Tout $\mathbb{C}$-ev admet au moins une droite vectorielle stable

4) Utilisation de la commutativité

Prop 14: Si u et v commutent, alors $\mathrm{Im}\, v$ et $\ker v$ sont stables par u (et v)

Cor 15: $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\ker(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont stables par u.

Appli 16:
- on pose $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda Id)$, alors $E_\lambda(u)$ est stable par u et $u_{E_\lambda(u)} = \lambda Id$
- on pose $C_\lambda(u) = \ker(u - \lambda Id)^{\alpha_\lambda}$, alors $C_\lambda(u)$ stable par u et $(u-\lambda Id)_{C_\lambda}$ est nilpotent
- $\ker(u^k)$ est stable par u, $\forall k \in \mathbb{N}$

et on a la chaine d'inclusion des noyaux itérés : (stationnaire)

$0_E \subset \ker u \subset \cdots \subset \ker u^p \subset \ker u^{p+1} \subset \cdots \subset E$

II Decomposition en somme directe de sous espaces stables

1) Diagonalisabilité

Def 17: u est diagonalisable si il existe une base B de E tel que $Mat_B(u) \in D_n(\mathbb{K})$

Th 18: u est diagonalisable $\Leftrightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) \Leftrightarrow m_u$ scindé simple

Th 19: si u diagonalisable et F stable par u alors u_F diagonalisable

Cor 20: Les sev stables par u diagonalisable sont ceux admettant une base de vecteurs propres

Th 21: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et $v \in \mathcal{L}(E)$

· v commute avec $u \Leftrightarrow$ les sous espaces propres de u sont stables par v (et par u).

Cor 22: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable

alors $Comm(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) / uv = vu\}$ est une algèbre de dimension $\sum_{\lambda \in Sp(u)} (\dim E_\lambda(u))^2$

Th 23: Si u et v commuttent et sont tous les deux diagonalisable alors il existe une base B de E tel que $Mat_B(u)$ et $Mat_B(v)$ sont diagonale

Appli 24: la somme de 2 endomorphismes diagonalisables qui commutte est diagonalisable

2) Reduction de Jordan

Th 25: (Lemme des Noyaux)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$ avec $P_1, \dots, P_k$ 2 à 2 premiers entre eux

alors $\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(P_i(u))$

Def 26: u est trigonalisable si il existe une base B de E tel que $Mat_B(u) \in T_n(\mathbb{K})$.

Th 27: u est trigonalisable $\Leftrightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} C_\lambda(u) \Leftrightarrow m_u$ scindé

DVPT 1

Th 28: (Decomposition de Dunford)

si m_u est scindé, alors $\exists! (d,n) \in \mathcal{L}(E)$ tel que: $u = d+n$

n est nilpotent

d est diagonalisable

d et n commuttent

Def 29: on appelle bloc de Jordan, de taille k, associé à $\lambda \in \mathbb{K}$

la matrice $J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & (0) \\ & \ddots & 1 \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{K})$

Th 30: Si m_u est scindé, alors il existe B, base de E, tel que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_{k_m}(\lambda_m) \end{pmatrix}$

3) Reduction de Frobenius

Prop 31: Soit $x \in E$, $\langle x \rangle_u = \{P(u)(x) / P \in \mathbb{K}[X]\}$ est le plus petit sev stable par u contenant x

Prop 32: Soit $x \in E$, $\varphi_x : \mathbb{K}[X] \to E$, $P \mapsto P(u)(x)$, alors $\ker(\varphi_x)$ est un ideal de $\mathbb{K}[X]$

Def 33: on note $m_{u,x}$ le polynôme unitaire tel que $(m_{u,x}) = \ker(\varphi_x)$ appelé polynôme minimal de x

Prop 34: $m_{u,x} \mid m_u$; $m_{u,x} = m_{u|\langle x \rangle_u}$; $\exists x \in E / m_{u,x} = m_u$.

Def 35: on dit que u est cyclique si $\exists x \in E / \langle x \rangle_u = E$

Th 36: u est cyclique $\Leftrightarrow \deg(m_u) = n \Leftrightarrow \chi_u = m_u$

Def 37: Soit $P = X^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ on appelle matrice compagnon de P

la matrice $\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{K})$

Th 38 (Reduction de Frobenius)

Il existe une suite $F_1, \dots, F_r$ de sev de E stables par u, non reduit à $\{0\}$ tel que:

1) $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$

2) F_i stable par u et u_{F_i} cyclique

3) en notant $P_i = m_{u_{F_i}}$, $P_1 = m_u$ et $P_r \mid P_{r-1} \mid \dots \mid P_1$

De plus il existe B base de E tel que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mathcal{C}(P_r) \end{pmatrix}$

4) Reduction des endomorphismes normaux

Ici $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien ou hermitien

Th 39: Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists ! \, u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$

Prop 40: Si F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u^*

Def 41: On dit que u est normal si $u \cdot u^* = u^* \cdot u$

Prop 42: Si F est stable par u, un endomorphisme normal alors $F^\perp$ est stable par u

Cor 43: Si F est stable par u un endomorphisme normal, alors u_F est normal

D
V
P
T
?

Lemme 44: Tout endomorphisme normal d'un espace euclidien de dimension 2 peut être representé dans une BON par une matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Th 45: Dans un espace euclidien,
un endomorphisme u est normal $\Leftrightarrow$ $\exists B$ un BON tel que:

$$\mathcal{M}at_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} \alpha_s & -\beta_s \\ \beta_s & \alpha_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Th 46: Dans un espace hermitien : u est normal $\Leftrightarrow$ u est diagonalisable.

III. Sous espaces stables par une famille d'endomorphismes

1) Reduction Simultanée

Th 47: Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes qui commuttent 2 à 2
Si tout les u_i sont diagonalisables (respectivement trigonalisables) alors il existe une base de E tel que $\forall i \in I$, $\mathcal{M}at_B(u_i) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{M}at_B(u_i) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$).
on dit que les u_i sont co-diagonalisable (respectivement co-trigonalisable)

2) Representation de groupes

Def 48: Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (E, ρ) une representation d'un groupe fini G, F ser de E
- si F est stable par la famille $(\rho(g))_{g \in G}$, on dit que (F, ρ_F) est une sous representation
- si (E, ρ) n'admet pas de sous representation propres, on dit qu'elle est irréductible

Th 49: (Th de Maschke)
Soit (E, ρ) une representation de G et F une sous representation de E alors il existe une sous representation F' telle que $E = F \oplus F'$

Cor 50: Toute representation peut s'écrire comme somme de representation irreductibles.

Refferences : Gourdon Algèbre
Algèbre L3