Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Soient $\mathbb{K}$ un corps (commutatif), E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

(I) Polynôme d'endomorphisme

1) L'algèbre $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$

Déf 1 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de la forme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On pose $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k \in \mathcal{L}(E)$.

Rq 2 : On a un isomorphisme $\mathcal{L}(E) \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ainsi toutes les notion développées se transposent aux matrices.

Prop 3 : L'application $\begin{array}{rcl} \phi_u : \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto & P(u) \end{array}$ est un morphisme d'algèbre.

Déf 4 : On note $\mathbb{K}[u] = \mathrm{Im}(\phi_u)$. $\mathbb{K}[u]$ est donc une sous algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Prop 5 : On note $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) : v \circ u = u \circ v\}$ le commutant de u, alors $\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{C}(u)$.

Prop 6 : L'ensemble $\mathrm{Ker}(\phi_u) = \{P \in \mathbb{K}[X] : P(f) = \tilde{0}\}$ est un idéal non trivial de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$.

Déf 7 : On note μ_u l'unique polynôme unitaire tel que $\mathrm{Ker}(\phi_u) = (\mu_u)$.

Prop 8 : On a $\mathbb{K}[u] \simeq \mathbb{K}[X]/_{(\mu_u)}$. Ainsi $\mathbb{K}[u] = \mathrm{Vect}(Id, u, \dots, u^{\deg(\mu_u)-1})$ et $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\mu_u)$.

Exple 9 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on pose $\exp : A \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$, alors $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$.

Lemme des noyaux : Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ 2 à 2 premiers entre eux alors $\mathrm{Ker}\left((P_1 \dots P_r)(u)\right) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u))$

2) Polynôme caractéristique

Déf 11 : On définit $\chi_u(X) = \det(X Id_E - u) = X^n - \mathrm{tr}(u) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$ le polynôme caractéristique de u

Prop 12 : Si F est un sev stable de E par u alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.

Appli 13 : Si λ est racine de χ_u de multiplicité m_λ, alors $0 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda$.

Prop 14 : Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u dans $\mathbb{K}$.

Appli 15 : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors $Sp_{\mathbb{K}}(u) \neq \emptyset$.

3) Polynôme annulateur

Déf 16 : On appelle polynôme annulateur de u tout polynôme $P \in \mathrm{Ker}(\phi_u)$. Ainsi P annulateur $\Leftrightarrow \mu_u \mid P$

Th de Cayley - Hamilton : Le polynôme caractéristique χ_u de u annule u.

Appli 18 : On a : $\mu_u \mid \chi_u$. En particulier, $\deg(\mu_u) \leq n$ puis $\dim(\mathbb{K}[u]) \leq n$.

Prop 19 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(u) = 0$ et $P(0) \neq 0$ alors $u \in GL(E)$ et $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$

DV 1

Appli 20 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$.

Corollaire 21 : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$ et $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = GL_n(\mathbb{R})^2 = \{A^2, A \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

Appli 22 : Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\exists! (Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}_{\deg(\mu_u)-1}[X]$ tq $X^N = Q.\mu_u + R$, ainsi $A^N = R(A)$.

4) Construction d'extension de corps.

Th 23 : $\mathbb{K}[u]$ est un corps $\Leftrightarrow$ $\mathbb{K}[u]$ est intègre $\Leftrightarrow$ μ_u est irréductible sur $\mathbb{K}$.

Exple 24 : On considère $i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ds la base canonique, alors $\mathbb{R}[i] \simeq \mathbb{R}[X]/_{(X^2+1)} := \mathbb{C}$

Exple 25 : Soit $u \in \mathcal{L}\left((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n\right)$ tq μ_u polynôme irréductible de degré n sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[u] \simeq \frac{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]}{(\mu_u)} := \mathbb{F}_{p^n}$

Exple 26 : On considère $\sqrt{2} \in \mathcal{L}(\mathbb{Q}^2)$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ alors $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \simeq \frac{\mathbb{Q}[X]}{(X^2-2)}$ est une extension quadratique de $\mathbb{Q}$

Th de Wantzel : $z \in \mathbb{C}$ est constructible $\Leftrightarrow$ z est dans une tour d'extensions quadratiques de $\mathbb{Q}$

Th de Gauss-Wantzel : Un polygône régulier à N côtés est constructible à la règle et au compas $\Leftrightarrow N = 2^\alpha . p_1 \dots p_r$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_r$ nb 1ers de Fermat 2 à 2 distincts

II Diagonalisation

1) Diagonalisation d'un endomorphisme

Déf 29 : On dit que u est diagonalisable si il existe $\mathcal{B}$ une base de E tq $Mat_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$

Th 30 : u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ Il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples
$\Leftrightarrow$ μ_u est scindé à racines simples
$\Leftrightarrow$ χ_u est scindé et $\forall \lambda \in Sp(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda(\chi_u)$

Exples 31 : Les projecteurs sont diagonalisables
Si carac $(\mathbb{K}) \neq 2$, les symétries sont diagonalisables

Prop 32 : Si $\mathbb{K}$ est un corps fini à q éléments, u diagonalisable $\Leftrightarrow u^q - u = \tilde{0}$.

Appli 33 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ tq $A = PDP^{-1}$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$ puis $e^A = Pe^DP^{-1}$

2) Endomorphismes auto-adjoints

Ici, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien ou hermitien.

Th 34 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists! u^* \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$

Déf 35 : L'endomorphisme u^* est appelé l'adjoint de u.

Déf 36 : On dit que u est autoadjoint si $u = u^*$.

Th spectral : Tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable dans une BON, de plus $Sp(u) \subset \mathbb{R}$

Appli : **Décomposition polaire** : L'application $\Psi : \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \times U_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme
$$(H, Q) \longmapsto HQ$$

Appli : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $|||A|||_2 = \rho(A^*A)$

3) Diagonalisation simultanée

Déf 40 : Une famille $(f_k)_{1 \leq k \leq N} \in \mathcal{L}(E)^N$ est dite co-diagonalisable si il existe une même base $\mathcal{B}$ de E telle que $\forall k \in [\![1, N]\!]$, $Mat_{\mathcal{B}}(f_k)$ est diagonale.

Lemme : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. u et v commutent $\Leftrightarrow$ Tout les s/s espaces propres de u st stables par v.

Th 42 : Soit $(f_k) \in \mathcal{L}(E)^N$ une famille d'endomorphismes diagonalisables.
alors $(f_k)_{1 \leq k \leq N}$ est co-diagonalisable $\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2$, f_i et f_j commutent

Appli 43 : La somme de deux endomorphismes diagonalisables qui commutent est diagonalisable

Th de Burnside : Tout sous groupe d'indice fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini

Appli 45 : L'application $\exp : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme

Appli 46 : Tout s/s groupe commutatif d'indice fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un s/s gpe des matrices diagonales

III Diagonalisation par blocs

1) Réduction des endomorphismes normaux

Ici, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien ou hermitien

Déf 47 : On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si $u \circ u^* = u^* \circ u$.

Prop 48 : Si F est stable par u normal, alors $F^\perp$ est stable par u et u_F est normal

Th 49 : Dans un espace hermitien, u est normal $\Leftrightarrow$ u est diagonalisable.

DVPT 2

Lemme 50 : Tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-ev possède au moins une droite ou un plan stable

Lemme 51 : Tout endomorphisme normal d'un espace euclidien de dimension 2 peut être représenté ds une BON par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ou $S_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Th : Dans un espace euclidien, u est normal
$\Leftrightarrow$ Il existe $\mathcal{B}$ une BON de E tq $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & S_{\alpha_1,\beta_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & S_{\alpha_s,\beta_s} \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$

2) Réduction de Frobenius

Déf 53 : Soit $x \in E$. On pose $\Phi_{u,x} : \mathbb{K}[X] \to E$, $P \mapsto P(u)(x)$

On note $\langle x \rangle_u = \mathrm{Im}(\Phi_{u,x})$ l'espace vectoriel engendré par x.

$\mathrm{Ker}(\Phi_{u,x}) = \{P \in \mathbb{K}[X] : P(u)(x) = 0_E\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

On note $\mu_{u,x}$ le polynôme unitaire tq $\mathrm{Ker}(\Phi_{u,x}) = (\mu_{u,x})$; le polynôme minimal local en x

Prop 54 : On a $\forall x \in E$, $\mu_{u,x} | \mu_u$ et $\exists x \in E$ tq $\mu_{u,x} = \mu_u$.

Déf 55 : On dit que u est cyclique si $\exists x \in E$, $\langle x \rangle_u = E$.

Th 56 : u est cyclique $\Leftrightarrow \deg(\mu_u) = n \Leftrightarrow \chi_u = \mu_u$.

Lemme 57 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $\exists x \in E$ tq $\mu_f = \mu_{f,x}$, alors $\langle x \rangle_f$ admet un supplémentaire stable par f.

Th de Frobenius : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe des polynômes unitaires $P_1, \dots, P_r$, et des sev stables $E_1, \dots, E_r$ tq : $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$; $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $P_{i+1} | P_i$ et $\forall i \in [\![1, r]\!]$, f_{E_i} cyclique de polynôme minimal P_i.

Déf 59 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de la forme $P(X) = X^n - (a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0)$.
On définit la matrice compagnon de P par $\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & 1 \; 0 & a_{n-1} \end{pmatrix}$

Prop 60 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $\exists P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ unitaires tq $P_{i+1} | P_i$ et il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{C}(P_r) \end{pmatrix}$

Appli 61 : $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u] \Leftrightarrow u$ est cyclique

IV) Trigonalisation

1) Trigonalisation d'un endomorphisme

Déf 62 : On dit que u est trigonalisable si $\exists \mathcal{B}$ base de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

Th 63 : u est trigonalisable $\Leftrightarrow$ il existe un polynôme annulateur de u scindé
$\Leftrightarrow \mu_u$ est scindé
$\Leftrightarrow \chi_u$ est scindé

Exple 64 : Les endomorphismes nilpotents sont trigonalisables

Exple 65 : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, tout les endomorphismes sont trigonalisables.

Appli 66 : $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr} A}$

Appli 67 : $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(A^k) = \{\lambda^k, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$

2) Décomposition de Dunford

Décomposition de Dunford : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé.
alors $\exists ! (d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ avec d diagonalisable et n nilpotent
tel que $u = d + n$ et d et n commutent.
De plus, d et n sont des polynômes en u.

Appli 69 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ qui admet une décomposition de Dunford $A = D + N$
alors $e^A = e^D e^N$.

Appli 70 : u est diagonalisable $\Leftrightarrow e^u$ est diagonalisable.

Appli 71 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On a $\lim_{t \to \infty} e^{tA} = 0_n \Leftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset]-\infty, 0[+ i\mathbb{R}$

Th de Stabilité de Lyapounov : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tq $f(0) = 0$ et $\mathrm{Sp}(Df_0) \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$.
Le système autonome $(E) : \begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{cases}$ admet l'origine comme point d'équilibre attractif