Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $m, n \in \mathbb{N}^*$.

I Action par translation

1) Action par translation à gauche

Déf 1 : Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ agit par translation à gauche sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par l'action $\alpha : GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

$(P, A) \longmapsto P.A = PA$

Prop 2 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. $G.A = G.B \iff \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B)$.

Prop 3 : Le représentant naturel d'une orbite de A est la matrice A échelonnée en lignes

Appli 4 : Méthode du pivot de Gauss pour échelonner le système linéaire $AX = b$.

2) Action par translation à droite

Déf 5 : De même, $GL_m(\mathbb{K})$ agit par translation à droite sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par $P.A = AP^{-1}$

Prop 6 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. $G.A = G.B \iff \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$

Appli 7 : Les transvections engendrent $SL_n(\mathbb{K})$. Les transvections et dilatations engendrent $GL_n(\mathbb{K})$.

II Action de Steinitz

1) Matrices équivalentes

Déf 8 : $G = GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$ agit par équivalence sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par : $(P,Q).A = PAQ^{-1}$

Prop 9 : On dit que deux matrices sont équivalentes ssi elles sont dans la même orbite. C'est le cas ssi elles représentent le même endomorphisme dans 2 paires de bases ≠.

Th du rang : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On note $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$.

$rg(A) = r \iff \exists (P,Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$ tq $A = P.J_r.Q^{-1}$

Coro 11 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. $G.A = G.B \iff rg(A) = rg(B)$

La matrice $J_{rg(A)}$ est alors le représentant naturel de l'orbite.

Appli 12 : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $rg(A) = rg({}^tA)$.

Appli 13 : Soit $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$, et $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

A et B sont équivalentes dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{L}) \iff$ A et B sont équivalentes dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

2) Topologie des orbites

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Prop 14 : $\forall r \in [\![1, \min(n,m)]\!]$, l'orbite O_r n'est pas fermée et $\overline{O_r} = \bigsqcup_{k=0}^{r} O_k$.

Prop 15 : $GL_n(\mathbb{K})$ est l'unique orbite ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour l'action par équivalence

Coro 16 : L'application $rg : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{N}$ n'est pas continue

Prop 17 : $\forall r \in [\![0, \min(n,m)]\!]$, O_r est connexe.

Prop 18 : L'ensemble P_r des projecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r est connexe.

II Action par conjugaison

1) Matrices semblables

Déf 19 : $G = GL_n(\mathbb{K})$ agit par conjugaison sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $P \cdot A = \underline{P.A.P^{-1}}$

Prop 20 : On dit que deux matrices sont semblables si elles sont dans la m̂ orbite.
C'est le cas ssi elles représentent le même endomorphisme dans 2 bases ≠.

Prop 21 : Si A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$; $\mu_A = \mu_B$, $rg(A) = rg(B)$.

Prop 22 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ μ_A est scindé à racines simples
$\Leftrightarrow$ A est annulé par un polynôme scindé simple

Appli : Th de Frobenius : Tout ~~ss~~ groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'indice fini est fini.

Prop 24 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ sa classe de similitude est fermée

2) Invariants de similitude

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n ; $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$

Déf - Prop 25 : On considère $\phi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow E$, $P \longmapsto P(f)(x)$

on note $\langle x \rangle_f = \mathrm{Im}(\phi)$ l'espace vectoriel engendré par x (pour f).
$\mu_{f,x}$ le polynôme unitaire tel que $(\mu_{f,x}) = \mathrm{Ker}(\phi)$.

D **Lemme 26** : $\exists x \in E$ tel que $\mu_f = \mu_{f,x}$. De plus, $\langle x \rangle_f$ admet alors un supplémentaire stable
V
P **Réduction de Frobenius** : $\exists! \, r \in \mathbb{N}^*$, $\exists! E_1, \dots, E_r$ stables par f, $\exists! \, P_1, \dots, P_r$ polynômes unitaires
T tq : $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$; $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $P_{i+1} \mid P_i$; $\forall i \in [\![1, r]\!]$, f_{E_i} cyclique et $\mu_{f_{E_i}} = P_i$
① La suite de polynômes $\underline{(P_i)_{1 \leq i \leq r}}$ est appelé facteurs invariants de f.

Coro 27 : Deux matrices sont semblables ssi elles ont les mêmes facteurs invariants
Le représentant naturel de l'orbite est alors $\mathrm{diag}(\mathcal{C}(P_1), \dots, \mathcal{C}(P_r))$.

Appli 28 : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A et ${}^tA$ sont semblables.

Appli 29 : Soit $\mathbb{L}$ extension de $\mathbb{K}$. 2 matrices sont semblables ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{L}) \Leftrightarrow$ elles le st ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3) Restriction de l'action à $O_n(\mathbb{R})$ (ou $U_n(\mathbb{C})$).

Th spectral : Soit $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, $\exists P \in U_n(\mathbb{C})$, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $A = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^*$

D
V **Appli 31** : $\exp : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ réalise un homéomorphisme
②

D **Décomposition polaire** : $\Psi : \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \times U_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, $(H, U) \longmapsto HU$ est un homéomorphisme
V
③

D **Exple 33** : Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$.
V alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.
④

Déf 34 : On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est normale si $M.M^* = M^*.M$.

Prop 35 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A est normale $\Longleftrightarrow$ la classe de similitude contient une matrice diagonale

D **Th : Réduction des endomorphismes normaux** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A normale
V Le représentant naturel de sa classe de similitude est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & S_{\alpha_1, \beta_1} & \\ 0 & & & & \ddots \; S_{\alpha_s, \beta_s} \end{pmatrix}$
⑤

IV Action par congruence

Dans cette partie, $\mathrm{carac}(\mathbb{K}) \neq 2$.

1) Matrices congruentes

Déf 37 : $G = GL_n(\mathbb{K})$ agit par congruence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par : $P \cdot A = P^* . A . P$

Prop 38 : On dit que deux matrices sont congruentes si elles sont dans la même orbite. C'est le cas ssi elles représentent la même forme bilinéaire dans deux bases différentes.

Déf 39 : On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : M^* = M \}$ l'ensemble des matrices "symétriques".

Réduction de Gauss : Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $A = P^* . \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} . P$

2) Action induite sur $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$

Prop 41 : On obtient une action sur $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ avec : $\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \\ (P, H) & \longmapsto & P^* . H . P \end{array}$

Prop 42 : Soient $A, B \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. $G \cdot A = G \cdot B \iff rg(A) = rg(B)$.

3) Action induite sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Prop 43 : On obtient une action sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec : $\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ (P, S) & \longmapsto & {}^tP . S . P \end{array}$

Loi d'inertie de Sylvester : Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $r = rg(A)$.
alors $\exists ! (s, t) \in \mathbb{N}^2$ tq $s + t = r$, appelé signature de A, noté $sgn(A)$, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = {}^tP . \begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix} . P$

Coro 44 : Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. $G \cdot A = G \cdot B \iff \begin{cases} rg(A) = rg(B) \\ sgn(A) = sgn(B) \end{cases}$

Appli : Lemme de Morse : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ tq $0 \in U$ et $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R})$
On suppose que $Df_0 = 0_n$ et $D^2 f_0$ non dégénérée, de signature $(p, n-p)$
alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages ouverts de 0 $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ tq $\forall x \in \mathcal{U}$, $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$, avec $\varphi(x) = u$

4) Action induite sur $GL_n(\mathbb{F}_p)$

Prop 46 : Dans $\mathbb{F}_p$, il y a $\frac{p+1}{2}$ carrés et $\frac{p-1}{2}$ non carrés ;
ainsi, $\forall a, b, c \in \mathbb{F}_p$, $ab \neq 0$, $ax^2 + by^2 = c$ admet au moins une solution.

Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$: Soit $\alpha \in \mathbb{F}_p^*$ un non carré dans $\mathbb{F}_p$
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{F}_q)$, on note $r = rg(A)$, alors $A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ ou bien $A \sim \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$

Coro : $G \cdot A = G \cdot B \iff rg(A) = rg(B)$ et $\det(A) = \det(B)$

DV 6 **Appli : Loi de réciprocité quadratique :**
Soient p, q nombres premiers impairs distincts, alors $\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$